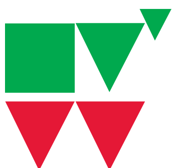
EUCLIDES



VAKBLAD VOOR DE WISKUNDELERAAR

EXAMENS WISKUNDE 2014
WIS EN WAARACHTIG
OPPERVLAKTE BEREKENEN MET INLIJSTEN
HET VWO EXAMEN WISKUNDE A
JAARVERGADERING/STUDIEDAG 2014

NR.1



ORGAAN VAN DE NEDERLANDSE VERENIGING
VAN WISKUNDELERAREN

JAARGANG 90 | SEPTEMBER 2014

INHOUDSOPGAVE

EUCLIDES JAARGANG 90 NR 1

IN DIT NUMMER



De coverafbeelding is van Rinus Roelofs: de Moebiusband is een bekend figuur. Een minder bekend aspect is dat er zowel een links- als een rechtsdraaiende variant van bestaat. In de afbeelding zijn beide oriëntaties gecombineerd.
Website: *www.rinusroelofs.nl*

ORGAAN VAN DE NEDERLANDSE VERENIGING VAN WISKUNDELERAREN



BIJVOEGSEL
VAN HET NIEUW TIJDSCHRIFT
VOOR WISKUNDE
GEWIJD AAN ONDERWIJSBELANGEN

ONDER LEIDING VAN
J. H. SCHOGT EN P. WIJDENES

MET MEDEWERKING VAN
Dr. H. J. E. BETH, DEVENTER — Dr. E. J. DIJKSTERHUIS, OISTERWIJK
Dr. B. P. HAALMEIJER, AMSTERDAM — Dr. D. J. E. SCHREK, UTRECHT — Dr. P. DE VAERE, BRUSSEL
Dr. D. P. A. VERRIJP, ARNHEM

1e JAARGANG 1924/25, Nr. [illegible]

P. NOORDHOFF — GRONINGEN

Eerste Bijvoegsel van het nieuw tijdschrift voor wiskunde, gewijd aan onderwijsbelangen. Later omgedoopt in Euclides, Tijdschrift voor de didactiek der exacte vakken.

Kort vooraf

Voor u ligt het eerste nummer van een bijzondere jaargang. In december 1924 werden wiskundedocenten geconfronteerd met een boekje dat meegestuurd werd met een tijdschrift. Dit boekje had de titel: *Bijvoegsel van het nieuw tijdschrift voor wiskunde, gewijd aan onderwijsbelangen.* Deze naam werd in 1927 gewijzigd in *Euclides, Tijdschrift voor de didactiek der exacte vakken.* Uw hedendaagse *vakblad voor de wiskundeleraar* start dus met haar 90e jaargang. Ter ere van dit jubileum op de cover *Euclides* in het oude lettertype, samen met een gloednieuw logo. Dit logo vindt u in het blad terug bij verwijzingen naar digitale artikelen; want we gaan natuurlijk wel met onze tijd mee... In dit nummer het examen-artikel geschreven door de medewerkers van het Cito. Daarnaast blikt Zwaantje Warmelink terug op het vwo wiskunde A-examen en David van Wijk werd geïntrigeerd door een opgave van het vmbo Tl-examen. Bij de aftrap van het laatste jaar voor de invoering van de vernieuwde eindexamenprogramma's starten we direct met twee daaraan gerelateerde artikelen. Lonneke Boels informeert u samen met collega's over lesmateriaal dat ontwikkeld is voor statistiek in het nieuwe wiskunde A-programma. Dit deden ze binnen de Leergang Vernieuwing Wiskundeonderwijs en daar schrijft Dédé de Haan over in onze vaste rubriek FIzier. In dit kader verwijzen we u ook graag naar pagina 27 waar een overzicht is opgenomen van nascholingsactiviteiten. Daarnaast graag aandacht voor een recensie van Sietske Tacoma. Zij bezocht de voorstelling *Reken maar nergens op* van Jan Beuving en Daan van Eijk. Een aanrader om met collega's of leerlingen te bezoeken. En bent u ook zo trots op ons Wiskunde Olympiade team? Lees dan vooral over hun geweldige zegetocht in Zuid-Afrika.
En ten slotte nog een oproep: schrijf u vooral snel in voor de komende verenigingsdag op 8 november, u leest er alles over op pagina 40.
Rest ons u een goed schooljaar te wensen,

Marjanne de Nijs

EXAMENS WISKUNDE 2014

EERSTE TIJDVAK

Ivo Claus
Ger Limpens
Melanie Steentjes
Ruud Stolwijk
Harco Weemink

Nadat het traditionele examenartikel van de Citotoetsdeskundigen vorig jaar een novum in *Euclides* opleverde door slechts digitaal te verschijnen, is er dit jaar voor gekozen om u hun bespiegelingen weer op papier voor te leggen.

Inleiding

[Ger Limpens]

We maken gebruik van de verworvenheden van het digitale tijdperk door te verwijzen naar de verschillende toets- en itemanalyses (TIA's in jargon) die gepubliceerd worden op de site van het Cito.[1] In die TIA's treft u de tabellen met p'-waarden[2] die u voorheen bij het examenartikel kon vinden. Als u de moeite neemt om die digitale gegevens op te zoeken, wordt u beloond met niet alleen de overzichten van de relevante p'-waarden maar ook met een grote verzameling andere data: relatieve scorefrequenties per vraag, domeingerelateerde onderverdelingen, overlap met andere 'verwante' wiskunde-examens van 2014-1, profielgerelateerde informatie en scores van jongens respectievelijk meisjes. We vermoeden dat velen van u deze gegevens als erg interessant zullen ervaren.

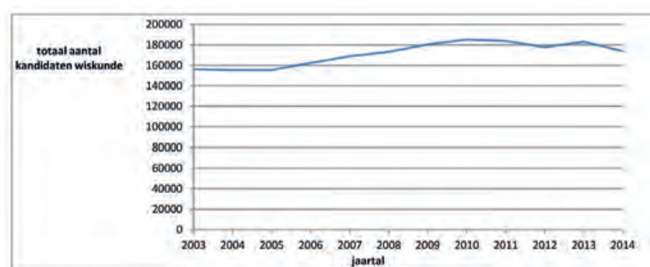
Al die tabellen kunnen overigens slechts tot stand gebracht worden door de massale deelname van u als docenten. De gegevens die door de correctoren van de eerste correctie in WOLF[3] worden ingevoerd, liggen aan de basis hiervan. Zoals u zult zien in de voornoemde TIA's worden door veel docenten de gegevens van hun gehele klassen ingevoerd, waardoor geconstateerd kan worden dat we bij onze analyses kunnen terugvallen op de resultaten van een ruime meerderheid van de deelnemende leerlingen. Een woord van dank voor die grootschalige deelname is hier wel op zijn plaats.

Bij de evaluatie van de examens wordt, behalve van bovenvermelde leerlingenscores, ook gebruikgemaakt van de zogeheten *quick scan*. Docenten die de resultaten van hun leerlingen via WOLF invoeren, krijgen een lijst van vier vragen. De antwoorden op deze vier vragen, die ingaan op de moeilijkheidsgraad, lengte en inhoudelijke aansluiting van het examen geven een goed beeld van de ontvangst van het examen. Dat wijkt nogal eens af van het beeld dat uit het forum van de NVvW waar minder docenten aan deelnemen oprijst. Ook dit laatste medium wordt door ons als examenmakers in de periode rond de examens uiteraard druk bezocht, maar u zult niet verbaasd zijn als we vermelden ons daar niet in de discussies te willen mengen. Wij als examenmakers beschouwen deze soms vrij direct geformuleerde stellingnames van docenten tegenwoordig als een digitale variant van gesprekken van collega's onder elkaar, die soms een hoog onderwijsleergesprekgehalte kunnen hebben...

opgave	Langste Sleep				Computer spel			Tegelvloer			Verkeers licht			Kliko-ombouw				Van video naar dvd		
vraagnr.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
max. score	2	3	3	4	2	4	4	3	2	3	1	4	4	3	3	4	5	4	3	4
p'-waarde	87	53	62	87	75	41	72	27	46	71	98	57	42	65	60	14	39	39	74	54

tabel 1 Leerlingaantallen 2014

In tabel 1 treft u de diverse hoeveelheden kandidaten van de verschillende wiskunde-examens aan. De overgrote meerderheid van de vmbo BB-kandidaten wordt via een computerexamen op hun wiskundige vaardigheden getoetst. Ook bij vmbo KB is het aantal CBT-getoetste kandidaten veruit in de meerderheid. En de totale hoeveelheid[4] kandidaten die op de een of andere wijze een wiskunde-examen heeft afgelegd wordt in figuur 1 getoond.



figuur 1 Aantal kandidaten wiskunde in 2003-2014

Als gevolg van de aanpassingen in de slaag/zakregeling is ook dit jaar een aparte vaardigheidsmeting gedaan waarbij eventuele vaardigheidsveranderingen per vak zijn gemeten, vergelijkend met eerdere examenjaren 2011, 2012 en 2013. Hier een citaat uit het persbericht van CvE van 12 juli 2014: 'De vmbo-leerlingen van 2014 zijn even vaardig gebleken als de leerlingen van 2013. De vaardigheidsverbetering ten opzichte van 2011 en eerder is geconsolideerd. (...) Bij het havo en het vwo is er ook sprake van een vaardigheidsstijging ten opzichte van 2011 en eerder. Die vaardigheidsstijging betreft alleen de kernvakken (Nederlands, Engels, wiskunde). Voor de niet-kernvakken is die stijging er niet; dit

in tegenstelling tot 2012 en 2013. Voor deze niet-kernvakken van havo en vwo is sprake van een vaardigheidsdaling ten opzichte van 2012 en 2013.'

Voordat we overgaan tot het bespreken van de examens, ook dit jaar een woord van dank voor al diegenen die zich bezighouden met de constructie van de wiskunde-examens. Dat zijn op de eerste plaats de constructiegroepsleden[5], ervaren docenten die onze *lifeline* naar het veld zijn en op basis van hun uitgebreide ervaring in de examenklassen van de doelgroepen ons de mogelijkheid bieden om passende examens te maken. Ook de leden van de vaststellingscommissies zijn broodnodig om de examenconcepten, ontwikkeld met behulp van die constructiegroepen, bij te sturen en te verfijnen. En verder zijn er vele collega's in het veld die op de een of andere wijze impulsen geven waarmee we de diverse examens steeds een slagje verder kunnen brengen. Denk daarbij aan collega's die examenconcepten van commentaar voorzien, maar ook aan docenten die examenbesprekingen bezoeken. Allen hartelijk dank!

Vmbo KB-GL/TL

[**Melanie Steentjes**]
Dit jaar was er veel te doen over de computerexamens voor wiskunde kaderberoeps (KB). Hierover verderop in dit artikel meer. We starten met het examen waar de meeste leerlingen aan deelgenomen hebben: het examen voor wiskunde gemengde/theoretische leerweg (GL/TL).

GL/TL – De 1562 docenten die de vragenlijst van de *quick scan* hadden ingevuld, gaven een gemiddeld cijfer van 6,7 aan het GL/TL-examen. Met dat oordeel was men even positief als vorig jaar. Het grootste deel (61%) van de docenten vond de moeilijkheidsgraad van het examen in orde, 17% van de docenten vond het examen moeilijk tegenover 19% van de docenten die aangaf het examen juist makkelijk te vinden. Daarnaast vond 79% van de docenten het examen van precies de goede lengte en 20% vond het examen te lang. De inhoudelijke aansluiting bij het gegeven onderwijs vond men voldoende (48%) tot goed (36%).
De startopgave *Piramides in Egypte* bleek een mooie binnenkomer te zijn, met een gemiddelde p'-waarde (gemiddelde van de drie vragen) van 62,7. Relatief veel commentaar kwam er op de eerste opgave, waarin moest worden berekend hoeveel jaar geleden 2511 voor Christus was. Sommige docenten vonden deze vraag te eenvoudig (hij scoorde ook goed met een p'-waarde van 90), anderen vonden de vraag niet binnen het examenprogramma passen. In de syllabus staat echter dat leerlingen moeten kunnen rekenen met gangbare maten voor tijd en daar valt deze vraag prima onder. Ook op vraag 2 waarbij leerlingen moesten aangeven uit welke positie de foto genomen kon zijn, kwam veel commentaar. Leerlingen bleken zeer inventief in het redeneren



figuur 2 Uit: vmbo GL/TL (Zonnepanelen)

waarom positie *B* de juiste was, en er werd relatief weinig met kijklijnen gewerkt. Voor enkel het omcirkelen van positie *B* kon een punt gegeven worden, maar de redenering moest wel sluitend zijn en veel leerlingen lieten hier een of twee punten liggen.
Ook de context *Olie* was relatief eenvoudig met een gemiddelde p'-waarde van 65,4. Bij vraag 5 moest gewerkt worden met een groeifactor om te berekenen hoeveel olie er in 2050 geproduceerd zou worden. Dit bleek een vraag te zijn waarbij de meeste leerlingen of nul punten scoorden (45%) of alle punten behaalden (40%). Met een p'-waarde van 47 was dit de lastigste vraag van deze context. Het was ook de enige vraag van deze context die geen overlap had met het KB-examen. Bij vraag 6 moest de vergelijking van een rechte lijn opgesteld worden. Uit het forum bleek dat een aantal leerlingen dacht dat het om een exponentiële formule ging. Wellicht had dat te maken met het gebruik van de letter *t* die vaak gebruikt wordt bij exponentiële formules.
De context *Zonnepanelen* leverde de leerlingen weinig problemen op, met uitzondering van vraag 8 waarin twee hoeken opgemeten moesten worden, zie figuur 2. Hier scoorde 51% van de leerlingen geen enkel punt! Een veelgemaakte fout leek het bovenin leggen van de 0 te zijn (zoals je doet bij het opmeten van een koershoek).
Vervolgens de eerste context die geen overlap had met het KB-examen, *Serie driehoeken*. Bij vraag 14 moest met inlijsten de oppervlakte van een driehoek bepaald worden. Dit leek bij veel leerlingen ver weggezakt te zijn en zij verzandden in berekeningen met bijvoorbeeld de stelling van Pythagoras. Bij vraag 15 moest de oppervlakte van een driehoek die zes keer zo groot was als de driehoek in vraag 14 berekend worden. Een zeer eenvoudige vraag als je goed gebruikmaakt van de vergrotingsfactor. Maar veel leerlingen bleken al afgehaakt te zijn na vraag 14: 72% scoorde geen enkel punt.

De context *Zonnehoek* was met een gemiddelde p'-waarde van 52,2 de lastigste context van het examen. Bij vraag 17 moest met de sinus gewerkt worden. Dit ging bij de meeste leerlingen of helemaal goed (54%

had alle drie de punten) of helemaal fout (33% had geen enkel punt). De vervolgvraag was een stukje lastiger, omdat niet alleen een hoek moest worden berekend met de sinus, maar er vervolgens ook afgelezen moest worden uit de grafiek. Dit bleek een mooi discriminerende vraag te zijn: leerlingen die goed scoorden bij deze vraag scoorden ook goed op het hele examen. Kritiek kwam er op het feit dat als de hoek verkeerd berekend was, het erg moeilijk was om de laatste punten te halen. Dit omdat het zeer lastig was om data die niet rond de 21e van de maand lagen, af te lezen uit de grafiek.
De context *Brug over de Rijn* was een volledige overlap met het KB-examen. Bij de eerste vraag vulden veel leerlingen 500 in de formule in, in plaats van 0. Er werd echter gevraagd naar de hoogte van pyloon 1. Pyloon 2 is even hoog als pyloon 1 vanwege de symmetrie van de dalparabool, maar dat moest dan wel expliciet genoemd worden door de leerling, anders moest er één punt afgetrokken worden.
Het examen sloot af met de context *Waterlinie*. Hier kwam weinig commentaar op en met niet al te lastige vragen leek deze opgave een goede afsluiting van het examen te zijn.
De N-term voor dit examen werd vastgesteld op 0,9. Dat resulteerde in een examen met 25,9% onvoldoendes en een gemiddeld cijfer van 6,4.

KB papier – Helaas is er bij het papieren KB-examen geen *quick scan*. Ook bij de examenbespreking en op het forum was er weinig commentaar op het papieren examen. Dat is wellicht jammer voor ons als examenmakers, maar niet zo merkwaardig, want steeds meer KB-leerlingen doen hun examen op de computer en dus komt er steeds minder feedback op het papieren examen.
Het examen begon met de opgave *Robomop*, een zeer eenvoudige startopgave. Bij de eerste vraag moest berekend worden hoeveel de robomop kostte als er 20% korting werd gegeven. Dit bleek totaal geen probleem te zijn voor de meeste leerlingen: 89% behaalde alle punten. Wellicht dat hier het effect van de rekentoets zichtbaar is? Bij vraag 4 moest aan de hand van een plattegrond van een kamer berekend worden hoe lang de robomop erover zou doen om de hele kamer te vegen. Een mooie discriminerende vraag, waarbij 31% van de leerlingen alle punten wist te halen.
Ook de context *Kaarsen* werd eenvoudig gevonden met een gemiddelde p'-waarde van 75,6. Vraag 6, 7 en 8 gingen over de wortelformule die bij de hoogte van de kaars hoorde. Het invullen in de formule en het tekenen van de grafiek gingen prima (p'-waarden van respectievelijk 88 en 84). Bij vraag 8 moest ingeklemd worden en dat bleek (niet onverwacht) iets lastiger, gezien de p'-waarde van 56.
De opgave *Zendmast* bleek een stuk lastiger te zijn. Bij vraag 9 moest de lengte van een kabel berekend worden

2p **12** De zendmast is in de wijde omgeving te zien. Agaat wil de afstand tot de zendmast weten. Ze strekt haar arm uit en geeft met haar vingers de grootte van de zendmast aan.

De afstand van haar oog tot haar vingers is 50 cm. De grootte die ze aangeeft met haar vingers is 4 cm. Je ziet een schets van de situatie.

300 m
4 cm
50 cm

→ Bereken de afstand van Agaat tot de zendmast in hele meters. Schrijf je berekening op.

figuur 3 Uit: vmbo KB (Zendmast)

met behulp van de stelling van Pythagoras. Een mooie discriminerende vraag, waar toch 36% van de leerlingen geen enkel punt wist te halen. Bij vraag 10 moest met behulp van de tangens een hoek berekend worden. Opvallend is dat deze vraag ongeveer gelijk scoorde aan de vorige vraag, terwijl goniometrie vaak toch iets lastiger gevonden wordt. Bij vraag 12, zie figuur 3, moesten leerlingen met behulp van gelijkvormigheid de afstand van een persoon tot de zendmast berekenen. Maar liefst 62% van de leerlingen haalde hier geen enkel punt.

VMBO	
Wiskunde CSE BB digitaal	16513
Wiskunde CSE BB papier	140
Wiskunde CSE KB digitaal	19831
Wiskunde CSE KB papier	3818
Wiskunde CSE GL/TL	48707
totaal	89009

HAVO	
Wiskunde A	35486
Wiskunde A pilot	213
Wiskunde B	12372
Wiskunde B pilot	128
totaal	48199

VWO	
Wiskunde A	18053
Wiskunde A pilot	247
Wiskunde B	16131
Wiskunde B pilot	174
Wiskunde C	1891
Wiskunde C pilot	44
totaal	36540
totaal generaal	173748

tabel 2 Vmbo overlap KB – GL/TL 2014

Met uitzondering van de eerste vraag was de context *Brug over de Rijn* overlappend met het GL/TL-examen. Voor de gegevens rond de overlap, zie tabel 2. Bij de eerste vraag moest met behulp van symmetrie de lengte van het brugdeel links van pyloon 1 berekend worden. Dit was op voorhand ingeschat als een eenvoudige vraag, en om die reden weggelaten uit het GL/TL-examen. De KB-leerlingen bleken er inderdaad weinig moeite mee te hebben: 82% van de leerlingen scoorde alle punten. Vraag 14 was wel overlappend met het GL/TL-examen en ook de KB-leerlingen hadden veel moeite met deze vraag waar de hoogte van pyloon 1 berekend moest worden. Zij scoorden nog veel lager dan de GL/TL-leerlingen: de vraag had een p'-waarde

van 40. Een reden hiervoor zou kunnen zijn dat vraag 13 de leerlingen de verkeerde kant op gestuurd heeft. Misschien dat ze de waarde van het antwoord bij vraag 13 in de formule hebben ingevuld. Vraag 15 bleek ook lastig te zijn. Slechts 8% van de leerlingen wist hier alle punten binnen te halen.
Zonnepanelen overlapte voor een groot deel met het GL/TL-examen. Het opmeten van de hoeken ging bij KB nog slechter dan bij GL/TL: een p'-waarde van 20 en 75% van de leerlingen haalde geen enkel punt. Vraag 17 had geen overlap met het GL/TL-examen, maar leek wel veel op vraag 9 bij het GL/TL-examen. Ook bij het KB-examen moest de hellingshoek van het dak berekend worden, alleen was er bij KB in de gelijkbenige driehoek een hoogtelijn getekend. Dit kleine verschil zorgde ervoor dat de KB-leerlingen er goed mee overweg konden. De vraag werd bij KB maar een klein beetje slechter gemaakt dan bij GL/TL: respectievelijk een p'-waarde van 69 en 74. De context *Olie* was in zijn geheel overlappend met het GL/TL-examen. Een lastige context met een gemiddelde p'-waarde van 45,7. Het examen sloot af met *Piramides in Egypte*.
De eerste twee vragen waren overlappend met het GL/TL-examen en gingen redelijk goed. Bij vraag 25 moest berekend worden op welke schaal de plattegrond op de uitwerkbijlage getekend was. De examenmakers hadden niet bedacht dat dit lastig zou zijn, maar opvallend was de lage p'-waarde van 23. De schaal moest berekend worden aan de hand van de afmetingen van de piramide van Chefren. Naast de breedte van de piramide was ook de hoogte gegeven (die was nodig voor het beantwoorden van vraag 26). Wellicht dat dit voor verwarring heeft gezorgd en dientengevolge voor de lage score. De N-term voor dit examen werd vastgesteld op 0,9. Dat resulteerde in een examen met 33,5% onvoldoendes en een gemiddeld cijfer van 6,0.

Computerexamen – Nogmaals, er was dit jaar veel te doen over het computerexamen bij wiskunde KB. In het computerexamen wordt gebruikgemaakt van de *toolbox* waarin onder andere een rekenmachine zit. In het Cito-examenartikel van 2012[6] is de functionaliteit van de *toolbox* uitgebreid beschreven. Er is geprobeerd de rekenmachine uit de *toolbox* zoveel mogelijk overeen te laten komen met de rekenmachines die de leerlingen gewend zijn. Verschillen zijn echter onontkoombaar, omdat de gebruikte rekenmachines onderling verschillen en we geen keuze willen maken voor een bepaalde rekenmachine. Een vervelend geval dat van tevoren niet werd voorzien door de examenmakers, zijn de verschillende minknoppen. Op de rekenmachine in de *toolbox* staan, net als op de meeste rekenmachines, een bewerkingsknop voor aftrekken en een (-) knop voor het invoeren van negatieve getallen, zie figuur 4.
Het probleem doet zich voor bij berekeningen die beginnen met een negatief getal. Bij de rekenmachine in



figuur 4 Screendump rekenmachine toolbox

de *toolbox* wordt bij de bewerkingsknop voor aftrekken het resultaat van een voorgaande berekening (ANS) neergezet: er verschijnt 'ANS – ' in het scherm. Dit komt overeen met de werking van rekenmachines van bijvoorbeeld Casio en Texas Instruments. Wanneer je bij Casio echter tussendoor op bijvoorbeeld 'C' of 'AC' drukt, wordt het geheugen gewist en kan er vervolgens wel een negatief getal ingevuld worden met deze knop. Bij de rekenmachine in de *toolbox* en bij rekenmachines van Texas Instruments kan het geheugen echter niet gewist worden. Deze rekenmachines dwingen af dat bij een dergelijke berekening gebruikgemaakt moet worden van de (-) knop voor het invoeren van negatieve getallen. Sommige leerlingen kwamen tijdens de afname erachter dat de rekenmachine in de *toolbox* een andere berekening uitvoerde dan zij wilden. Ook is gemeld dat er leerlingen zijn die niet gemerkt hebben dat de rekenmachine een andere berekening uitvoerde. Daardoor hebben deze leerlingen tijdens het examen verkeerde antwoorden gegeven. Om deze reden is besloten om de leerlingen die hiervan hinder ondervonden, de mogelijkheid te bieden om het gemaakte computerexamen ongeldig te laten verklaren en het examen opnieuw te maken met behoud van het recht op herkansing.
Er is besloten om de rekenmachine niet aan te passen. Wel zal er volgend jaar meer voorbeeldmateriaal beschikbaar zijn, zodat leerlingen hiermee kunnen oefenen. Uiteraard mogen leerlingen ook altijd hun eigen rekenmachine bij het examen gebruiken. Een heel ander probleem was dat de lengtes van de scoreschalen niet voor alle varianten gelijk waren. Dit bleek voor de meeste scholen gelukkig niet problematisch te zijn.

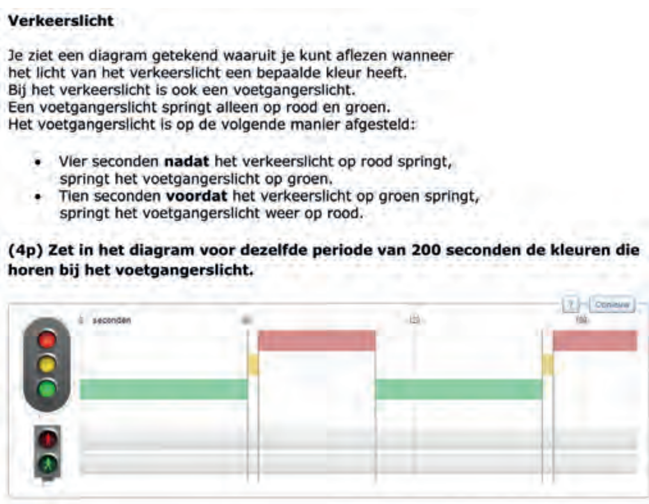
Dit jaar wordt één variant als voorbeeldexamen openbaar gemaakt. In totaal hebben we de gegevens ontvangen van 10.925 leerlingen. Deze leerlingen hebben verschillende varianten gemaakt, dus de opgaven van de variant die hier besproken wordt, zijn slechts door een beperkt deel van deze leerlingen gemaakt. De p'-waarden zijn te vinden in tabel 3.
De variant begon met de context *Langste sleep*. Zowel rekenen met tijd als met procenten kwam aan bod. Leerlingen bleken hier weinig moeite mee te hebben, getuige de gemiddelde p'-waarde van 72,3.

opgave	Pirami-des in Egypte		Olie			Zonne-panelen			Brug over de Rijn	
max. score	2	3	3	3	3	2	4	2	2	4
vraagnr. gltl	1	2	4	6	7	8	10	11	19	20
p'-waarde gltl	90	62	79	63	72	43	81	78	74	49
vraagnr. kb	23	24	20	21	22	16	18	19	14	15
p'-waarde kb	77	46	55	37	45	20	66	61	40	25
verschil in p'-waarden	13	16	24	26	27	23	15	17	34	24

tabel 3 Vmbo KB cbt 2014

Bij de opgave *Computerspel* speelde het probleem met de rekenmachine. Aan de scores is op het eerste gezicht niet te zien dat veel leerlingen hinder hadden van een afwijkende rekenmachine. Bij de laatste vraag van deze context moest een tabel ingevuld worden en een grafiek getekend worden. Van de leerlingen scoorde 44% alle punten. Maar liefst 32% liet hier een punt liggen. Opvallend was dat bij alle vragen in de varianten waarbij een grafiek getekend moest worden, veel leerlingen het laatste punt niet haalden. Welk punt dat is, valt natuurlijk niet te achterhalen, maar bij observaties in de klas bleek dat veel leerlingen moeite hadden met het tekenen van een kromme. Hiervoor moesten zij gebruikmaken van een functionaliteit uit de diagram-tool, maar het leek erop dat veel leerlingen hier niet of nauwelijks bekend mee waren. We gaan kijken hoe we dat volgend jaar beter onder de aandacht kunnen brengen.
Bij de context *Tegelvloer* moest gerekend worden met hoeken en draaisymmetrie. Dit vonden leerlingen erg lastig. Bij de laatste vraag moesten leerlingen een patroon zo kleuren dat er maar twee symmetrieassen waren. Dit concrete werk bleek de leerlingen het beste af te gaan: de p'-waarde van deze vraag was 71.

figuur 5 Uit: vmbo KB (Verkeerslicht)



Bij de laatste vraag van *Verkeerslicht* moesten de kleuren van het voetgangerslicht aangegeven worden in een diagram, zie figuur 5. Een mooi voorbeeld van een vraag die in een papieren examen lastiger te stellen was geweest aangezien het kleuren veel tijd in beslag zou hebben genomen.
Bij *Kliko-ombouw* kwam meetkunde uitgebreid aan bod. De derde vraag bleek erg lastig te zijn. Hier moesten leerlingen beredeneren of een houten plaat van bepaalde afmetingen voldoende groot was om de ombouw te maken. Veel leerlingen gingen hier de mist in: 69% behaalde geen enkel punt en het was met een p'-waarde van 14 de lastigste vraag van deze variant.
Het examen sloot af met de context *Van video naar dvd*. Bij de eerste vraag moest een formule gegeven worden die hoorde bij een lineair verband. Deze vraag scoorde met een p'-waarde van 39 ongeveer gelijk aan een vergelijkbare vraag in het papieren examen (vraag 21 met een p'-waarde van 37).

Havo A

[**Ivo Claus**]
Het examen havo wiskunde A bestond dit jaar uit 22 vragen, verdeeld over vijf opgaven. De leerlingen behaalden gemiddeld 49 van de 80 punten. Het examen werd genormeerd met een N-term van 1,1, hetgeen resulteerde in 18,7% onvoldoendes en een gemiddeld cijfer van 6,6. Een mooi resultaat!
Het examen kreeg in de *quick scan* van 1140 docenten gemiddeld een voldoende (6,2). Men vond het geen makkelijk examen, maar de behaalde resultaten van de leerlingen vielen alleszins mee. Verder vond men het examen gemiddeld aan de lange kant. De analyses wezen echter niet in die richting. Er is een aanvulling op het correctievoorschrift verschenen behorende bij de vragen 3, 4 en 13. In elk van de gevallen betrof het afrondingskwesties. Nauwkeurigheid/afronding blijft een punt van aandacht in de correctievoorschriften.

In de examenbespreking merkten docenten op dat dit examen 'anders' was dan examens van de afgelopen jaren. Vanuit het oogpunt van examentraining is het begrijpelijk dat docenten en leerlingen de behoefte hebben aan op elkaar lijkende examens. Men zal begrijpen dat dit vanuit het standpunt van CvE en de examenmakers geen doel is, en zelfs onwenselijk. Natuurlijk is enige herkenbaarheid goed, maar ieder jaar benutten we opnieuw de mogelijkheid om uit de gehele breedte van het examenprogramma onderwerpen te kiezen. Dit laat onverlet dat het streven is om leerlingen over de jaren heen, via de N-term, voor gelijke prestaties gelijk te belonen. Men merkte verder op dat veel vragen ófwel moeilijk waren ófwel gemakkelijk, met maar weinig variatie in moeilijkheidsgraad daartussenin. Getuige de variatie in de p'-waarden lijkt dit toch niet het geval.

In de eerste opgave, *Krachtvoer voor melkkoeien*, werd de winst op koemelk als functie van de hoeveelheid krachtvoer beschouwd. Vraag 1 over het toenamendiagram (misschien een ondergeschoven kindje in de lespraktijk) vond men niet zo geschikt als beginvraag, maar p' = 74 wijst erop dat het als beginvraag zijn functie van binnenkomertje vervulde. Een ander – niet nieuw – punt van kritiek was de (grote) hoeveelheid tekst. Het is goed om hierop te blijven letten. De eerste vraag (hoeveel krachtvoer geeft de maximale melkproductie?) gaf veel discussie op het forum, met name over de nauwkeurigheid van het eindantwoord. Zo valt het antwoord 13 ook te verdedigen, als je uitgaat van het discreet zijn van de variabele *V*. Aan het eind van de discussie lazen we de uitspraak 'Het probleem is dat wij (docenten) wiskundig denken, terwijl leerlingen contextgericht denken'. Mooier is het niet te zeggen.
De aanvulling op het correctievoorschrift van vraag 3 betrof de nauwkeurigheid van het eindantwoord: de gevraagde waarde *W* is een bedrag (dus te noteren in twee decimalen), maar omdat dit de winst per koe is, is het in zekere zin een gemiddelde, hetgeen een antwoord met meer decimalen rechtvaardigt.
Vraag 4 had, zoals verwacht, een lage p'-waarde (40): algebra blijft een lastig onderwerp voor de leerlingen. Bovendien werd op het forum opgemerkt dat de vermenigvuldigingspunten bij sommige leerlingen verwarring geven. Toch moeten leerlingen hiermee om kunnen gaan.
Bij de opgave *FF snel sms'en* werden goede resultaten behaald: de p'-waarden varieerden van 57 tot 78.
Op het forum werden bij vraag 11 van opgave *Bloedpaspoort* de gevolgen van het – al dan niet – tussentijds afronden uitgebreid besproken. De mate van tussentijds afronden gaf een grote variatie in de antwoorden. Dat vonden sommige docenten onwenselijk. Echter, juist de aanpak van de leerling bepaalt bij deze vraag hoeveel punten hij/zij krijgt: het antwoord, mits correct verkregen, is hier van ondergeschikt belang.
Bij vraag 13 berekenden sommige leerlingen eerst de bovengrens en vervolgens – conform de gegevens in het examen – rondden zij die af op één decimaal (2,9); daarna wordt dan de symmetrie van de normale verdeling gebruikt, waaruit als ondergrens 0 volgt. Een bovengrens van 2,9 is zeker acceptabel, maar 0 als ondergrens moet een leerling doen inzien dat het afronden minder grof moet gebeuren. Het correctievoorschrift van vraag 13 verdiende daarom een aanvulling. In *Van score naar cijfer* werd de berekeningswijze van het examencijfer onder de loep genomen. Bij vraag 14 behaalde 81% van de leerlingen twee van de vier punten, waarschijnlijk betrof het dan de situatie die in de opmerking in het correctievoorschrift beschreven stond; veel leerlingen werkten met getallenvoorbeelden, maar de zinsnede 'voor elke waarde van *L*' vraagt om meer dan dat. Op het forum werd ook een fraaie formulering van een leerling, passende bij het vak wiskunde A, genoemd: 'de helft [van de punten] gedeeld door alle punten is altijd 0,5'. Dat lijkt ons een prima verwoording van het algebraïsche analogon uit het correctievoorschrift.
Bij de correctie van vraag 16 kwam nog eens voor het voetlicht wat het begrip 'herleiding' betekent. Sommige docenten vroegen zich af hoe een aanpak te scoren waarbij eerst de coördinaten van twee punten worden berekend en vervolgens de bijbehorende formule (in de gevraagde vorm) wordt opgesteld. De examenbespreking was hier duidelijk in: nul punten.
Bij vraag 17 moest uit de grafiek op de uitwerkbijlage de waarde 49 worden afgelezen. De opmerking in het correctievoorschrift gaf aan dat een afleesfout 'aan de bovenkant' van 50 acceptabel was. Op het forum vroeg men zich af waarom 48 dan niet. Het juiste antwoord kwam even later van een andere docent: iets meer dan 49 (bijvoorbeeld 49,4) aflezen betekent dat een score van 50 behaald moet worden. Iets minder dan 49 (bijvoorbeeld 48,4) aflezen betekent dat een score van 49 behaald moet worden.
De opgave *Wat zeg je?* had van alles wat in zich. Combinatoriek, kansrekening, het opstellen van een lineaire formule en een vraag waarbij aflezen, rekenen en *common sense* tot een goed antwoord leiden. Vraag 20 leverde op het forum een interessante kwestie op ten aanzien van de toevoeging '(of nauwkeuriger)' achter een antwoord in een correctievoorschrift. Hiermee wordt bedoeld dat het 'exacte' antwoord ook – op correcte wijze – op méér decimalen mag worden afgerond dan het antwoord dat in het correctievoorschrift staat vermeld.

Havo A pilot

[**Ivo Claus**]

Het pilotexamen havo wiskunde A bestond uit 22 vragen, verdeeld over zes opgaven. De via WOLF verkregen gegevens van 198 kandidaten wezen uit dat de kandidaten gemiddeld 49 van de 84 punten behaalden. De opgave *Honkbal* was pilotspecifiek, evenals de onderzoeksopgave *Wind delen met wind-delen* en vraag 19 in *Wat zeg je*? De verschillen in de p'-waarden van de overlapvragen tussen de beide populaties waren beperkt. De pilotleerlingen scoorden meestal net iets hoger dan de reguliere kandidaten. Zie daarvoor tabel 4 met overlapgegevens. De algebravragen 4, 11 en (deels) 9

tabel 4 Havo overlap A – A pilot 2014

opgave	Krachtvoer voor melkkoeien				FF snel sms'en				Van score naar cijfer					Wat zeg je?		
vraagnr.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	18	20	21
max. score	3	3	3	3	4	3	3	4	4	4	4	3	4	3	5	5
p'-waarde pilo	81	72	92	42	61	70	79	62	55	77	31	52	38	79	50	44
regulier	74	61	90	40	69	70	78	57	51	76	29	48	38	75	64	46

maakten ze net iets beter, maar het verschil is marginaal. Twee vragen waarbij het verschil wél duidelijk was, waren vraag 2 en vraag 20, waarbij de eerste in het voordeel van de pilotleerlingen uitviel en de tweede juist niet Het blijft gissen naar de oorzaken van deze verschillen tussen beide populaties. Zowel tijdens de pilotexamenbespreking als in de *quick scan* lieten de pilotdocenten hun waardering blijken: men vond het een mooi examen dat een goede mix kende tussen formele wiskunde (zoals de herleidingen) en vragen waarbij je met gezond verstand een heel eind kunt komen. Over de aansluiting op het onderwijs was men ook heel positief.

Er lijkt een verband te zijn tussen het percentage gewonnen wedstrijden en het totaal aantal scorepunten en tegenpunten van een team. Over een heel seizoen geldt voor een team bij benadering de volgende formule:

$$P = \frac{100 \cdot S^2}{S^2 + T^2}$$

Hierin is P het percentage gewonnen wedstrijden in het seizoen, S het totaal aantal scorepunten en T het totaal aantal tegenpunten in het seizoen.

Voor teams die in een seizoen twee keer zoveel tegenpunten als scorepunten krijgen, geldt $T = 2 \cdot S$. Als je dit invult in de formule van P, ontstaat een nieuwe formule van P. Door die formule te herleiden, kun je laten zien dat er in deze situatie voor P altijd hetzelfde getal uitkomt.

4p 15 Geef deze herleiding.

figuur 6 Uit: havo A pilot (Honkbal)

In de pilotopgave *Honkbal* werd het verband beschouwd tussen het percentage gewonnen wedstrijden van honkbalteams enerzijds en hun totaal aantal scorepunten en tegenpunten in een seizoen anderzijds. Het binnenkomertje, vraag 14, scoorde hoog. Bij vraag 15 werd op algebraïsch vlak veel van de leerlingen gevraagd, zie figuur 6. De behaalde p' = 11 geeft aan dat hier nog steeds werk aan de winkel is voor docenten en leerlingen. De pilotdocenten vonden dat, ook al is dit een stevige algebraïsche vraag, zoiets moet kunnen binnen het pilotexamenprogramma. Nota bene: 64% van de leerlingen scoorde hier nul van de vier punten: er zullen waarschijnlijk heel wat leerlingen de $2S$ niet tussen haakjes hebben gezet in de formule voor P: immers, zouden ze dat wel doen, dan leverde dat al één punt op.
Vraag 16, waarbij kwalitatief aan de hand van een formule moest worden geredeneerd, deed het goed: naast 43% van de leerlingen die nul punten behaalden, verdiende 37% van de leerlingen hier de maximumscore van drie punten. Vraag 17 kende een erratum (misschien ware het beter dit een 'precisering' te noemen?). Leerlingen werden hierbij gewezen op de noodzaak om een gegeven formule te hanteren. Volgens een aantal docenten was dit eigenlijk niet nodig geweest. De leerlingen konden met deze vraag goed uit de voeten: p' = 76. Vraag 19 in de opgave *Wat zeg je?* behoorde niet tot de overlap met regulier, in tegenstelling tot de rest van de opgave. Bij deze telvraag werd veelvuldig alleen het aantal resultatenlijstjes berekend met precies acht goede antwoorden in plaats van minstens acht. Dit leverde helaas maar één punt op en die score werd door 30% van de leerlingen behaald.
De onderzoeksopgave was er een volgens het boekje. De vraag is of het, in de gegeven situatie, verstandig is om enkele winddelen te kopen. Een winddeel is een participatie in een gemeenschappelijke windmolen. Je betaalt aanschaf en onderhoud, maar hoeft dan (behalve belasting) geen stroomkosten meer te betalen. Leerlingen konden goed met deze onderzoeksopgave aan de slag, want je kunt eenvoudig punten verdienen door een en ander uit te rekenen. De relatieve score-opbouw (lopend van score 0 tot en met de maximumscore 8) was: 2-1-4-10-14-22-26-11-11. Toch is het geen pure rekenopgave. Want, zo leert de opgave, wanneer je géén winddelen koopt, heb je geen aanschafkosten: dat bedrag kun je op een spaarrekening zetten. Dus: samengestelde rente, dus een exponentieel verband, dus wiskunde. De opmerking in het correctievoorschrift betreft een fout die van tevoren was voorzien: bij het berekenen van de rentewinst moet nog wel het ingelegde bedrag van het eindbedrag worden afgetrokken. 26% van de leerlingen had zes van de acht punten; vermoedelijk betrof het bij hen de genoemde fout.
Op basis van de psychometrische analyses blijkt al met al dat het pilotexamen een klein beetje moeilijker was dan het reguliere examen en dat de pilotkandidaten iets vaardiger waren dan de reguliere kandidaten. De N-term van dit examen is, daaruit voortvloeiend, vastgesteld op 1,4 hetgeen resulteerde in 12,1% onvoldoendes en een gemiddelde cijfer van 6,7.

Havo B

[**Ruud Stolwijk**]

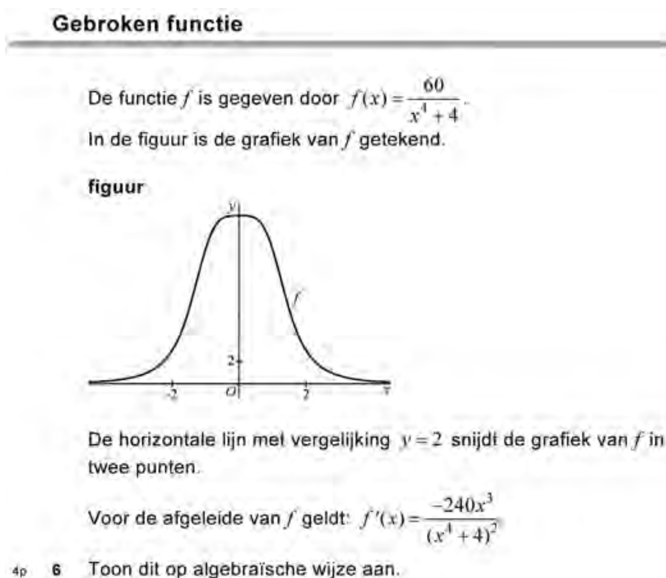
Het havo wiskunde B-examen van 2014 werd in het veld ontvangen als wat moeilijk en mogelijk wat lang. Dit laatste werd overigens niet expliciet door de verzamelde data bevestigd: de laatste vragen van het examen werden niet in groten getale overgeslagen. Verrassend genoeg werd nogal eens de opmerking gehoord 'dat er zo veel exact rekenwerk in voorkwam'. De examenmakers menen dat dit voor een examen wiskunde B mogelijk als compliment bedoeld is... Hoe dan ook: met een gemiddeld cijfer van 6,4 en 25% onvoldoendes (bij een N-term van 1,4) bleken de 11327 kandidaten het netjes gedaan te hebben: iets beter dan in 2012, iets minder goed dan in 2013. Je zou voorzichtig kunnen concluderen dat de gevolgen van de aanscherping van de slaag/zakregeling inmiddels ook op leerlingniveau zijn aanbeland.
Uit de door 559 docenten ingevulde *quick scan* blijkt dat een kleine 30% van de docenten de aansluiting van het examen op het gegeven onderwijs onder de maat vindt, terwijl ruim 70% deze aansluiting juist (dik) in orde acht. Misschien zegt dit niet zozeer iets over het

examen, maar mogelijk meer iets over de beleving van de docenten en de wijze waarop zij invulling geven aan het examenprogramma. De docenten belonen het examen overigens met een 6,4 – hetzelfde cijfer als de leerlingen gemiddeld behaalden. Maar dat zal toeval zijn.

Het examen opende met de contextopgave *Kwelders* over de aanwezigheid van ganzen op kwelders. Een van de bedoelingen van zo'n eerste opgave (naast het toetsen van kennis en vaardigheden) is altijd om kandidaten een prettige start van het examen te laten beleven. Dat lijkt goed gelukt, de eerste vraag was de best gemaakte van het hele examen, en de vervolgvragen scoorden met p'-waarden van 79 en 74 ook prima. De vierde vraag was wat lastiger: lang niet alle kandidaten bleken in staat de gevraagde grenswaarde te vinden, ondanks (of juist dankzij?) het feit dat dit op meerdere manieren te doen was. Er mocht zowel redenerend vanuit de formule als met behulp van de grafische rekenmachine gewerkt worden. En blijkens de resultaten (ongeveer 40% scoorde hier geen punten en een even grote groep scoorde alle punten) was dit een onderscheidende vraag – en onderscheid maken is nu eenmaal een doel van een examen.

De tweede opgave *Gebroken functie* had een gebroken functie als onderwerp. De drie vragen hierbij moesten exact worden aangepakt, en volgens de p'-waarden was dat voor de kandidaten bij vraag 5 (p' = 77) en vraag 7

figuur 7 Uit: havo B (Gebroken functie)



Gebroken functie

De functie f is gegeven door $f(x) = \dfrac{60}{x^4 + 4}$.
In de figuur is de grafiek van f getekend.

figuur

De horizontale lijn met vergelijking $y = 2$ snijdt de grafiek van f in twee punten.

Voor de afgeleide van f geldt: $f'(x) = \dfrac{-240x^3}{(x^4+4)^2}$

4p 6 Toon dit op algebraïsche wijze aan.

6 maximumscore 4

- Het functievoorschrift van f is te schrijven als $f(x) = 60(x^4+4)^{-1}$ 1
- Differentiëren geeft $f'(x) = 60 \cdot -1 \cdot (x^4+4)^{-2} \cdot 4x^3$ 2
- Hieruit volgt $f'(x) = -240x^3 \cdot (x^4+4)^{-2}$ en dit geeft $f'(x) = \dfrac{-240x^3}{(x^4+4)^2}$ 1

(p' = 80) geen groot probleem. Bij vraag 6 (p' = 51) moest op algebraïsche wijze worden aangetoond dat een gegeven uitdrukking inderdaad de afgeleide was. Dit bleek voor een redelijke groep leerlingen vaak een lastige vraag, en soms werd er zelfs niet aan begonnen, zie figuur 7. Bij deze vraag werden aan het met juist gebruik van de kettingregel differentiëren twee scorepunten toegekend. Dit zijn twee 'ondeelbare' punten, maar uiteraard blijft ook dan gelden dat een verschrijving of rekenfout één scorepunt kost (vakspecifieke regel). Overigens: in het examen vwo wiskunde B zou bij deze vraag ongetwijfeld de formulering 'Bewijs' gebruikt zijn – en volgens de nomenclatuur is dit bij havo wiskunde B ook toegestaan. Daarom wijzen we op deze plek nog maar eens op de lijst met examen(werk) woorden, die immers als bijlage bij de syllabus officiële status geniet.[7]

De derde opgave *Bloembak* betrof ruimtemeetkunde, vormgegeven in de contextsituatie van een bloembak. Het tekenen van het zijaanzicht bij vraag 8 bleek niet al te lastig, het oppervlakte-rekenwerk bij vraag 9 wel. Maar de in deze context logische (slot)vraag tot hoeveel centimeter onder de rand de potgrond komt, bleek voor veel kandidaten (te) lastig: met een p'-waarde van 29 bleek dit de slechtst scorende vraag uit het examen. Het bedenken van een juiste strategie, de formule voor de inhoud van een kegel paraat hebben, de uiteindelijke vraag niet vergeten te beantwoorden... In het licht van de komende vernieuwingen zou je dit een echte wiskundige denkactiviteit kunnen noemen. Vervolgens kwamen er weer twee 'kale' opgaven (*f boven g* en *Functie met logaritme*), waar de kandidaten met diverse formules uit de voeten moesten kunnen. Over de formulering van de introductie op vraag 12 ('Het maximum van g kan geschreven worden in de vorm $a\sqrt{b}$ met b een zo klein mogelijk geheel getal.') werd wel een en ander opgemerkt – en achteraf bezien was deze formulering wellicht ook niet optimaal. Maar anders zijn er wel heel veel vormen van exacte antwoorden mogelijk. Vraag 13 kende ook een voor leerlingen wat lastige formulering, waarbij de gezochte waarde van x op twee decimalen gegeven moest worden. Criticasters van deze vraag leken deze essentiële toevoeging niet altijd te hebben gelezen... Het bleek een flink onderscheidende vraag, waar de helft van de kandidaten geen punten scoorde en een vijfde deel van de kandidaten alle punten. Bij vraag 14 moesten (tot verrassing van sommige docenten) de vergelijkingen van de asymptoten van een logaritmi-

sche functie 'gewoon gegeven' worden, zonder verdere toelichting. Dat dit lang niet door alle kandidaten goed werd gedaan, moge blijken uit de p'-waarde (61). Bij vraag 15 (p' = 46) werd duidelijk dat lang niet alle kandidaten bij havo wiskunde B goed thuis zijn in het rekenen met logaritmen. In de opgave *Theezakje* (een in de ogen van de examenmakers mooi voorbeeld van een alledaagse context) kwam de ruimtemeetkunde nogmaals aan bod, zowel rekenend (vraag 16, p' = 72) als tekenend (vraag 17, p' = 61), met keurig resultaat. In de slotopgave, simpelweg *Twee functies* geheten, moesten de kandidaten laten zien dat ze exact konden werken met wortels en kwadraten. Dat dit voor veel kandidaten lastig is, zal geen verrassing zijn, zeker aan het eind van een toch drie uur durend examen.

Havo B pilot

[**Ruud Stolwijk**]

De docenten die de in totaal 124 kandidaten voor het havo wiskunde B-pilotexamen van 2014 onder hun hoede hadden, vonden het een moeilijk examen. Door te kijken naar de prestaties op de met het reguliere examen overlappende vragen kon deze indruk worden bevestigd. Ook vond men het wat lang, en in tegenstelling tot bij het reguliere examen werd dit door de verzamelde data bevestigd. Ondanks deze kritiekpunten vond men het toch een aardig examen, voldoende tot goed aansluitend op het gegeven onderwijs, gewaardeerd met een 6,8, goed passend bij het pilotprogramma. De kandidaten werden beloond met een gemiddeld cijfer van 6,5 met 19,4% onvoldoendes (bij een N-term van 1,7). Ze hebben het hiermee net iets beter gedaan dan de reguliere kandidaten.

Over de overlappende opgaven (*Kwelders*, *f boven g* en *Functie met logaritme*) is in het gedeelte over het reguliere examen havo wiskunde B al een en ander opgemerkt. De pilotkandidaten doen het op deze opgaven eigenlijk overal wat beter. Dit kan komen door de in het nieuwe programma toegenomen aandacht voor algebraïsch en exact werken: in plaats van ruimtemeetkunde wordt analytische meetkunde gedaan en daarbij wordt nu eenmaal heel wat exact gerekend. Dat leerlingen daar dan vaardiger in blijken, mag nauwelijks verrassend zijn. Overigens is aan de reguliere opgave *Functie met logaritme* een pilotvraag toegevoegd, die het onderwerp transformaties extra onder de aandacht brengt. Hierbij diende aardig wat algebrakennis gebruikt te worden. Dit bleek voor de meeste kandidaten erg lastig (p' = 28). Toch bleek een vijfde van de kandidaten dit foutloos te kunnen.

De 'nieuwe meetkunde', in de syllabus *Meetkunde met coördinaten* geheten maar vaak aangeduid als *Analytische meetkunde*, kwam in het examen aan bod in drie opgaven. De eerste daarvan, *Krik*, had een krik als onderwerp, waarbij met behulp van de cosinusregel een afstand moest worden berekend. Dat de cosinusregel gebruikt moest worden (twee keer zelfs), was aan de kandidaten zelf. Het binnen zekere grenzen zelf kunnen bepalen van een juiste wiskundige aanpak is immers deel van de vernieuwing en met een p'-waarde van 59 bleek dat de pilotkandidaten hierop waren voorbereid. De tweede opgave bij dit domein, *Bissectrices*, bleek heel wat lastiger – en dan vooral de tweede vraag, zie figuur 8. De loodlijn die hier nodig was, moest wel op de juiste lijn (k) geplaatst worden, en dat bleek lang niet bij alle kandidaten het geval. De derde meetkundeopgave, *De Eierland*, was de slotopgave van het examen. Deze opgave had als vraag hoeveel tijd een schip binnen het bereik van de Texelse vuurtoren De Eierland vaart. Deze opgave werd als leuk beoordeeld door de pilotdocenten en het bleek daarnaast ook een behoorlijk onderscheidende opgave te zijn: ruim een derde van de kandidaten scoorde zeven of acht punten, krap een derde scoorde nul of één. Overigens: het tweede figuur was toegevoegd om de kandidaten enige richting in hun aanpak te geven – er bleef immers nog genoeg over om zelf te bedenken.

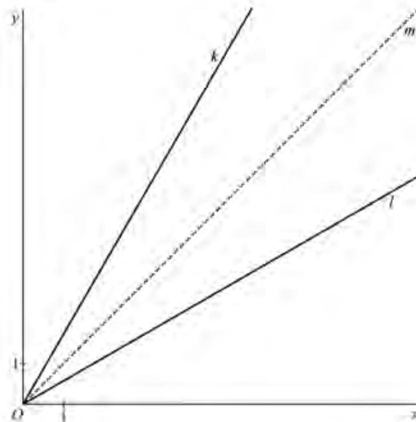
Bissectrices

De lijn k is gegeven door: $y = \sqrt{3} \cdot x$

De lijn l is gegeven door: $y = \frac{1}{3}\sqrt{3} \cdot x$

De bissectrice van een hoek is de lijn die de hoek in twee gelijke delen verdeelt. In de figuur hieronder is de bissectrice m van de hoek die de lijnen k en l met elkaar maken, gestippeld weergegeven.

figuur



5p 16 Toon door exacte berekeningen aan dat de afstand van het punt $P(\sqrt{3}, 1)$ tot de x-as gelijk is aan de afstand van dit punt P tot de lijn k.

figuur 8 Uit: havo B pilot (Bissectrices)

De overige twee opgaven (*Gebroken functie* en *Twee functies*) betroffen analyse, waarbij ten opzichte van het reguliere examen enige aanpassingen waren gedaan. Dat de gebruikte gebroken functie net een wat andere functie was dan bij regulier, komt door de beperking die in het nieuwe programma aan 'kettingregelfuncties' is gesteld: de eerste stap mag

slechts een lineaire zijn. Zie de syllabus, te vinden op *www.cve.nl/item/wiskunde_havo_vwo*. Hier zijn trouwens ook de syllabi van de andere wiskundevakken te vinden. Bij dezen van harte aanbevolen, want in september 2015 worden de (bijgestelde) pilotprogramma's immers landelijk ingevoerd – en dat is als u dit leest al binnen een jaar! De andere opgave, *Twee functies*, illustreert dat in het nieuwe programma de productregel niet meer tot de havo B-stof zal behoren (al mag deze in het kader van het schoolexamen natuurlijk wel behandeld worden door de docent). Deze pilotopgave kan dus ook best in het nu nog reguliere programma – misschien een bruikbare tip voor toekomstige schoolexamens?

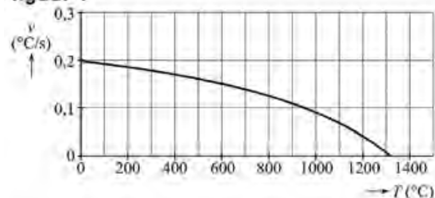
Vwo A

[**Harco Weemink**]

Het wiskunde A-examen bestond dit jaar uit vijf opgaven met daarin 21 vragen die maximaal 82 punten konden opleveren. Het aantal kandidaten waarvan via WOLF data is ontvangen, bedraagt 15154. Het examen is dit jaar door de docenten gemiddeld met een een krappe voldoende (5,6) beoordeeld. In de *quick scan* gaven ruim 300 van de 662 docenten aan dat het examen qua moeilijkheidsgraad precies goed was. Meer dan de helft beoordeelde de lengte van het examen als precies goed. Opmerkelijk was wel dat meer dan de helft van de docenten de inhoudelijke aansluiting op het onderwijs slecht of onvoldoende vond. Mede door een geconstateerde vaardigheidsstijging ten opzichte van 2011 (het laatste jaar voor het invoeren van de aangescherpte slaag/zakregeling) kreeg het examen uiteindelijk een N-term van 1,1 wat resulteerde in een gemiddeld cijfer van 6,6 met 16,3% onvoldoende. Een resultaat dat inligt tussen dat van 2013 en de resultaten van de jaren daaraan voorafgaand.
De eerste opgave van het examen, *Chips*, richtte zich op het gebruik van de normale verdeling. Al een aantal jaren blijkt dat vragen hierover beter worden gemaakt dan op grond van het vooronderzoek mag worden verwacht. Dit lijkt zijn oorzaak te hebben in de trainbaarheid van dit soort vragen in de voorbereiding op het examen. Op het forum van de NVvW was enige discussie of bij vraag 1 gezien de context een afronding naar boven niet meer op zijn plaats was geweest. Het feit dat er in de stam geen sprake is van een eis dat 'ten hoogste' 0,2% een bepaald minimumgewicht mag hebben, maar dat het 'te lichte deel' 0,2% van het geproduceerde aantal vormt, geeft aanleiding om alleen de wiskundig correcte afronding als correct antwoord te hanteren.
De tweede opgave, *Ontslagvergoeding*, bevatte een economisch getinte context. Bij vraag 5, waar leerlingen met de informatie uit de stam een ontslagvergoeding moesten berekenen, was het aantal kandidaten dat twee van de drie te behalen punten scoorde opmerkelijk groot. Gezien de opmerkingen op het forum heeft veelal het fout doen van de eerste stap, het bepalen van het aantal dienstjaren, tot aftrek van dit ene punt geleid. Deze vraag kreeg een aanvulling op het correctievoorschrift waarin duidelijk werd gemaakt dat het ontbreken van het euroteken acceptabel was. De procentberekening bij vraag 6 leverde weinig problemen op, slechts 2% van de leerlingen scoorde hier nul punten op.
De vragen in de opgave *Keramiek* resulteerden allemaal in p'-waarden tussen de 40 en 60. De afweging of een leerling bij vraag 8 voor het vermenigvuldigen van de twee incorrecte waarden het laatste scorepunt nog verdient, werd in deze vraag ondervangen door in het eerste scorepunt het inzicht dat er moest worden vermenigvuldigd te belonen. In vraag 9 bleek dat bij het opstellen van de afgeleide en het daarmee redeneren, zie figuur 9, leerlingen die kozen voor de aanpak met een schets in het algemeen meer punten scoorden dan leerlingen die probeerden een redenering op te stellen. Bij deze tweede aanpak bleek vooral het beschrijven van het gedrag van de noemer een valkuil voor veel kandidaten. De laatste twee vragen uit deze opgaven waren zoals van tevoren ingeschat niet makkelijk, maar met p'-waarden van respectievelijk 40 en 54 voor de betere kandidaten goed maakbaar.
Uitslagen voorspellen bevatte zowel de moeilijkste als de makkelijkste vraag uit dit examen. Uit de reacties op het forum valt af te leiden dat de eenvoudige vragen

figuur 9 Uit: vwo A (Keramiek)

figuur 1



Omdat het over opwarmen gaat, is in figuur 1 alleen een niet-negatieve waarde van v weergegeven.

De formule die hierbij hoort, is de volgende:

$$v = 0{,}197 + \frac{T - 20}{8{,}16T - 17360}$$

Hierin is v de maximale opwarmsnelheid van de oven in °C per seconde en T de temperatuur van de oven in °C.

Met behulp van de afgeleide van v kan men aantonen dat de maximale opwarmsnelheid v steeds sterker daalt bij toenemende oventemperatuur.

8p 9 Stel de formule op van de afgeleide van v en toon daarmee die steeds sterkere daling aan.

hierin door een deel van de docenten als te makkelijk worden beschouwd. De bedoeling van de examenmakers is om leerlingen middels een relatief eenvoudige vraag aan de context te laten wennen. Of dat in dit geval helemaal gelukt is, is de vraag omdat de vervolgvraag in dit geval de laagste p'-waarde van het examen opleverde. Hoewel het al een flink aantal jaren een terugkerende activiteit in het vwo A-examen is, blijkt het opstellen van een redenering nog steeds een lastige activiteit voor veel leerlingen. 'Alweer een voetbalvraag', verzuchtte een docent tijdens de examenbespreking, daarbij het vermoeden uitsprekend dat deze opgave door jongens veel beter zou worden gemaakt. Uit de analyse van de gegevens blijkt dat de eerste twee vragen uit de opgave *Toevalvoetbal* inderdaad beter gemaakt zijn door de jongens. Wanneer we echter de gehele context beschouwen, is de gemiddelde p'-waarde van de jongens weliswaar hoger, maar het verschil is nauwelijks meer dan het geconstateerde verschil op het gehele examen. De opmerking bij vraag 18 in het correctievoorschrift dat het gericht proberen, wat in veel gevallen rechtstreeks tot het juiste antwoord leidde, met de maximale score mocht worden beoordeeld, maakte van deze vraag een alles-of-niets-vraag waar 75% alle punten en 15% geen enkel punt behaalde.
De gegevens die via WOLF binnenkomen, geven de gelegenheid om wat specifieker te kijken naar subgroepen. Evenals vorig jaar zijn de jongens iets vaardiger dan de meisjes, en het verschil is zelfs iets groter geworden. Het grootste verschil in p'-waarde vinden we bij de vragen 7 en 14. Opmerkelijk dat hier in beide gevallen naar een redenering wordt gevraagd. Als we kijken naar de profielen, dan levert dat geen afwijkend beeld op ten opzichte van de afgelopen jaren. De N&G-leerlingen scoren gemiddeld een 6,8 met 11,1% onvoldoendes en voor de E&M- en C&M-kandidaten liggen deze waarden op 6,6 en 15,4%, respectievelijk 6,1 en 27,5%.

Vwo A pilot

[**Harco Weemink**]

Dit jaar werd voor de derde keer het pilotprogramma voor vwo wiskunde A geëxamineerd. De maximale score was met 84 punten twee punten hoger dan het reguliere examen. Tijdens de examenbespreking met de pilotdocenten waren kritische geluiden te horen over zowel de lengte als de moeilijkheidsgraad van het examen. Dat bleek ook uit de *quick scan* ($n = 9$) waar het examen unaniem als te lang werd beoordeeld. Uit de analyse van de ingezonden gegevens van 213 leerlingen bleek dit ook; meer dan de helft van de vragen werd door meer dan 2% van de kandidaten overgeslagen. De inhoudelijke aansluiting bij het onderwijs was voor de meeste docenten wel voldoende, maar toch bleef de gemiddelde waardering steken bij een 5. De geconstateerde moeilijkheid in combinatie met de lengte van het examen heeft geleid tot een uitzonderlijk hoge N-term van 2,1. Dit geeft een gemiddeld cijfer van 6,8 met 14,1% onvoldoende cijfers. Een resultaat dat in lijn is met de eerdere twee jaren. De overlap tussen het reguliere en het pilotexamen bedraagt ongeveer 43% van het totale puntenaantal. In de 'overlapopgaven' is er binnen de opgave naast een aantal identieke vragen gekozen voor pilotspecifieke vragen. De opgave *Uitslagen voorspellen* is hier een voorbeeld van. De eerste twee vragen zijn gelijk aan die in het reguliere examen, de derde vraag is afwijkend. Waar in het reguliere examen gevraagd werd naar het opstellen van een lineaire formule, is in het pilotexamen een meer open vraag opgenomen waar leerlingen zelf een aanpak moeten vinden. Deze meer open vraagstelling heeft ertoe geleid dat in dit geval 58% van de leerlingen geen punten wist te scoren voor deze vraag.
Omdat in het nieuwe programma de kansrekening en statistiek niet meer getoetst wordt op het centraal examen, is er meer ruimte voor algebraïsche activiteiten. In de tweede opgave, met de titel *De bevolking van Oeganda*, komt dit naar voren. In de derde vraag van deze opgave moesten de leerlingen een pittige afgeleide opstellen. Hierbij moest zowel de quotiëntregel als de afgeleide van een exponentiële formule worden gebruikt. Toch was de p'-waarde niet erg laag, waarschijnlijk omdat de afgeleide was gegeven en leerlingen aan

tabel 5 Vwo overlap A – A pilot 2014

	vraag nr. pilot	vraag nr. regulier	max score	p' pilot	p' regulier
Uitslagen voorspellen	1	13	3	95	92
	2	14	3	29	25
Keramiek	8	8	4	52	49
	9	9	6	35	42
	10	10	3	76	60
	11	11	5	45	40
Ontslagvergoeding	13	5	3	76	75
	14	6	5	84	86
	15	7	3	59	54
			35	59.1	57.0

figuur 10 Uit: vwo A pilot (Ontslagvergoeding)

Om een indruk te krijgen hoe de Zwartkruisformule werkt, bekijken we voor een topbestuurder ($F = 5$) hoe Z toeneemt als hij op leeftijd x ontslagen wordt. Hij is op zijn 40e in dienst gekomen. Zie de tabel.

tabel

x	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52
Z	0,0	1,6	3,4	5,4	7,6	13,3	16,8	20,5	24,5	28,8	50,0	...	...

Voor de waarden van x van 40 tot en met 44 kun je een formule opstellen voor de ontslagvergoeding Z, uitgedrukt in x.
Dat kan door in de formule $Z = \frac{L \cdot D \cdot 5}{4}$ de variabelen L en D uit te drukken in de leeftijd x, en de formule daarna te herleiden tot de vorm $Z = ax^2 + bx + c$

5p **17** Bereken de waarden van a, b en c

moesten tonen dat het differentiëren dit resultaat had. In de laatste opgave moest het jaar van de snelste toename met behulp van deze afgeleide worden bepaald.
De opgave *Keramiek* kwam ook voor in het A-examen. Hier kwam het verschil in vaardigheid tussen de reguliere en pilotpopulatie het duidelijkst aan het licht, zie tabel 5 voor de volledige resultaten. Vraag 9 werd relatief het slechtst gemaakt door de pilotleerlingen. In eerste instantie opvallend omdat uit de extra aandacht voor algebra te verwachten is dat voor pilotleerlingen een technische vaardigheid als differentiëren eenvoudiger zou zijn. Een mogelijke verklaring ligt in het tweede deel van de opgave. Door de pilotdocenten werd geopperd dat hun kandidaten door deze extra aandacht voor algebra minder snel geneigd zijn de (eenvoudigere) route met een schets van de grafiek te volgen. De laatste vraag van deze opgave week iets af van die in het reguliere programma: het pilotprogramma geeft de mogelijkheid om in het examen vragen te stellen over formules met e-machten. Hoewel deze vraag 12 door de docenten als mooie vraag werd betiteld, leverde het voor veel leerlingen een lage score op. Een p'-waarde van 34 was het resultaat.
De opgave *Ontslagvergoeding* bestond uit drie vragen die ook in het reguliere examen zaten, aangevuld met een staartje voor de pilotleerlingen. In dit staartje zat de moeilijkste vraag uit het examen, namelijk vraag 17, zie figuur 10. Hierin moest door substitutie en herleiding een tweedegraadsformule worden opgesteld. Maar liefst 15% van de kandidaten bleek deze vraag te hebben overgeslagen en slechts 5% wist de maximale score te behalen, de p'-waarde was met 25 de laagste van het examen. De pilotdocenten gaven aan dat de hier gevraagde activiteit zeker binnen het programma valt, maar dat dit erg moeilijk blijft voor de leerlingen.
In de opgave *Eb en vloed* werden vragen over goniometrische formules en verbanden gesteld, ook een nieuw onderdeel ten opzichte van de huidige examens. Waar de eerste twee vragen nog redelijke p'-waarden opleverden (55 en 44) was de laatste vraag met een p'-waarde van 37 wederom een erg lastige vraag. Het resultaat van deze vraag viel tegen omdat vijf van de zes punten verdiend konden worden met de goed trainbare activiteit van het opstellen van een goniometrische formule. In hoeverre de moeilijkheidsgraad van de rest van dit examen invloed heeft gehad op de resultaten naar het eind toe is moeilijk in te schatten.
Zoals sinds het eerste pilotexamen gebruikelijk, is de laatste opgave een korte onderzoeksopgave, één vraag bij een context die leerlingen niet stuurt in de richting van een oplossingsstrategie en die bij voorkeur ruimte biedt voor meerdere routes naar de gevraagde oplossing. Naast andere aanpassingen in het examen is dit een voorbeeld van het denkactieve aspect uit de vakvernieuwing. In dit geval is gekozen voor een context die ook voorkwam in het reguliere examen. Door geen instapvraag te stellen, ligt de weg naar het juiste antwoord minder 'op de stip'. In dit geval heeft deze vraag geleid tot een p'-waarde van 28, wederom mogelijk negatief beïnvloed door de lengte en moeilijkheidsgraad van de rest van het examen.

Vwo C

[**Harco Weemink**]
In het wiskunde C-examen van dit jaar zaten twee opgaven die gedeeltelijk overlap vertoonden met het A-examen. Er was een overlap van 19 punten, hetgeen betekent dat er sprake was van 24% identieke vragen. In totaal konden de leerlingen 79 punten behalen, verdeeld over 21 vragen. Van 1652 kandidaten zijn de resultaten via WOLF ontvangen en gebruikt voor de analyses. Het aantal kandidaten dat het wiskunde C-examen aflegt, vertoont al enige jaren een dalende trend. In 2012 was de analyse nog gebaseerd op ruim 2800 kandidaten. Het wiskunde C-examen kreeg net als het A-examen slechts een krappe voldoende van de 309 docenten die de *quick scan* invulden. Meer dan de helft vond het examen (te) moeilijk en bij de lengte van het examen werd door een ruime meerderheid 'precies goed' ingevuld. Op het punt van de inhoudelijke aansluiting bij het onderwijs waren de meningen verdeeld. Kijkend naar de analyses valt het op dat relatief weinig vragen een p'-waarde tussen de 50 en de 70 hebben. Hoewel slecht één vraag onder de p' = 30 scoorde, bleek het totale examen aan de moeilijke kant. Met de geconstateerde vaardigheidsstijging op de kernvakken heeft dit geresulteerd in een N-term van 1,4 waarbij het percentage onvoldoende op 15,4% kwam te liggen en het gemiddelde cijfer een 6,6 werd.
Het examen had met *De Palio van Siena* een niet al te moeilijk begin. Na een gemiddelde-snelheid-berekening was de combinatoriekvraag met een p'-waarde van 79 goed te doen. De daaropvolgende kansvraag, waar geen sprake was van een binomiale of normale kansverdeling, bleek een stuk lastiger (p' = 41). Opvallend hierbij was het percentage leerlingen (39%) dat geen enkel punt op deze vraag scoorde. Bij vraag 4 kon een binomiale kansverdeling worden gebruikt en deze trainbare activiteit leverde meteen een flink hogere p'-waarde van 79 op.
In de context *Spiraalvormen* werd onder andere een beroep gedaan op het kunnen rekenen met groeifactoren. Het omrekenen van groeifactoren is een veelgevraagde activiteit in examens, maar dan meestal in een tijdscontext. Gezien de lage p'-waarden was de transfer om deze vaardigheid in een niet-tijd-gebonden-context om te zetten een brug te ver voor veel leerlingen. Vraag 6 leverde dan ook de laagste p'-waarde van het examen op. In de laatste vraag van deze opgave werd gevraagd om de formule $A = 9 \cdot 0{,}87^n$ te herleiden tot de vorm $\log(A) = a \cdot n + b$. Hierbij werd de eerste stap van deze herleiding $\log(A) = \log(9 \cdot 0{,}87^n)$ weggegeven,

	vraag nr. wisA	vraag nr. wis C	max score	p' wis A	p wis C
Keramiek	8	18	4	49	32
	12	20	6	54	49
Uitslagen voorspellen	13	9	3	92	93
	15	11	2	82	81
	16	13	4	40	32
			19	58.9	52.2

tabel 6 Vwo overlap A – C 2014

Je kunt een overzicht maken van alle onderlinge afstanden tussen de voorspellingen van de lijsttrekkers. Een klein stukje van dat overzicht zie je in tabel 2. Zo lees je bijvoorbeeld af dat de afstand tussen de voorspellingen van Roemer en Halsema 24 is.

tabel 2

afstanden	Wild.	Roem.	Hals.	Verd.	Coh.	Balk.	Pecht.	Rut.	Thie.	Sta.	Rou.
Roemer	28	0	24	26	22	20	18	18	18	18	18
Halsema	34	24	0	36	22	26	20	18	26	24	16

Als je dat hele overzicht zou bekijken, dan zou opvallen dat alle afstanden even getallen zijn. Dat is geen toeval, dit geldt altijd bij twee voorspellingen. Je kunt beredeneren dat de afstand tussen twee voorspellingen altijd een even getal is. Het begin van zo'n redenering zou er als volgt uit kunnen zien:
We gaan eerst uit van twee voorspellingen die precies hetzelfde zijn. Dan is hun afstand gelijk aan 0. We gaan nu een verschil aanbrengen en maken daarna dat verschil steeds groter. We beginnen door in de eerste voorspelling ergens één zetel weg te halen.

3p **10** Maak de redenering af en laat daarmee zien dat de afstand tussen twee voorspellingen altijd een even getal is.

figuur 11 Uit: vwo C (Uitslagen voorspellen)

zodat alleen het kunnen toepassen van de rekenregels voor logaritmen, die nog steeds op pagina 2 van het C-examen gegeven zijn, overblijft. Desondanks haalde 52% van de kandidaten geen enkele punt voor deze vraag.
De eerste opgave die overlap met het A-examen vertoonde, was *Uitslagen voorspellen*. Bij vraag 9 en 11 scoorden de C- en A-leerlingen ongeveer even goed, bij vraag 13 scoorden de A-leerlingen gemiddeld 8 p'-punten hoger, zie tabel 6. Waar bij het wiskunde A-examen van de leerlingen gevraagd werd om te onderzoeken of het mogelijk is dat een afstand een oneven getal is, werd bij C in vraag 10, zie figuur 11, gegeven dat het altijd een even getal moet zijn en een begin van een redenering die gevraagd werd om af te maken. Waar deze vraag in het A-examen een p'-waarde van 25 opleverde, was het duwtje in de rug voor de C-leerlingen voldoende om de p'-waarde op 40 uit te laten komen. De, ten opzichte van het A-examen, extra vraag 12 had als bedoeling om de C-leerlingen iets meer houvast te geven richting de vervolgvraag waar ze de formule van een lineair verband moesten opstellen.
In de wiskunde C-specifieke opgave *Gezichten herkennen* ging het weer om kansrekening. Eerst een drietal kansgerelateerde vragen, waar de rechttoerecht-aanvraag met de normale verdeling een te verwachten hoge p'-waarde van 94 opleverde. In de vervolgvraag waar de wortel-*n*-wet moest worden toegepast, daalde deze waarde naar 59. Het scorepatroon doet vermoeden dat nogal wat leerlingen de wortel-*n*-wet niet of niet correct hebben toegepast.
Twee van de vier vragen uit de laatste opgave *Keramiek* kwamen ook in het wiskunde A-examen voor. Opvallend groot was het verschil in p'-waarde van vraag 18 (vraag 8 in het A-examen), de A-leerlingen scoorden gemiddeld maar liefst 17 p'-punten hoger dan de C-leerlingen. Bij de redelijk technische bewerking die in vraag 20 van de leerlingen werd gevraagd, scoorden de A-leerlingen slechts iets beter dan de C-leerlingen. Met vraag 21 zat er een pittige vraag aan het eind. De leerlingen werd gevraagd om, bij gegeven temperatuurformule, de snelheid waarmee de temperatuur op een bepaald moment daalt te berekenen. Iets wat een kandidaat hoogstwaarschijnlijk niet algebraïsch kan en daarom werd expliciet in de vraag aangegeven dat dit zowel met de GR als met een differentiequotiënt mocht gebeuren.
Rest nog om op te merken dat uit de analyses bleek dat de jongens, hoewel flink in de minderheid, gemiddeld 3,2 p'-punt hoger scoorden dan de meisjes. Een verschil dat behoorlijk groter is dan bij het examen van 2013.

Vwo C pilot

[**Harco Weemink**]
Over het wiskunde C-pilotexamen waren de pilotdocenten (vijf in getal) tevreden. Het examen bevatte een goede implementatie van de nieuwe onderwerpen en scoorde gemiddeld een 7,2. De kleine groep van ongeveer 40 leerlingen die dit examen gemaakt heeft, scoorde gemiddeld 45,5 punten op een maximum van 73, verdeeld over 22 vragen. Dit examen kreeg een N-term van 0,9 waardoor het gemiddelde cijfer op een 6,5 uitkwam en 24,3% van de leerlingen een onvoldoende scoorde. Het gemiddelde cijfer is daarmee gelijk aan dat van de voorgaande twee jaren dat het pilotexamen is afgenomen, het percentage onvoldoendes ligt iets hoger.
De overlap met het reguliere wiskunde C-examen bedroeg 34 punten (47%) hetgeen redelijk overeen komt met de hoeveelheid overlap in de examenprogramma's van het oude en het nieuwe programma. Goed om te vermelden is dat de overlap met A-pilot minimaal is. Dit jaar zijn er slechts twee vragen – vraag 1 en vraag 8 met een totaal van zeven punten – die zowel in C-pilot als A-pilot voorkomen.

tabel 7 Vwo overlap C – C pilot 2014

	vraag nr. pilot	vraag nr regulier	max score	p' pilot	p' regulier
Uitslagen voorspellen	1	9	3	93	93
	2	11	2	82	81
	3	12	2	81	87
	4	13	4	31	32
Spiraalvormen	12	5	4	77	80
	13	6	6	26	29
	14	7	3	77	73
Keramiek	15	18	4	42	32
	17	20	6	43	49
			34	54.4	55.2

De vragen in *Uitslagen voorspellen* kwamen ook allemaal in het reguliere C-examen voor. Tussen de resultaten van beide groepen was weinig verschil te zien, zie tabel 7. De opgave *Spiraalvormen* was, op de laatste vraag van C-regulier na, identiek. Ook hier lagen de scores van de pilotleerlingen dichtbij die van de reguliere leerlingen. Het grootste verschil werd geconstateerd in de derde opgave die overlap vertoonde, *Keramiek*. Op de eerste vraag uit deze opgave, een telgerelateerde vraag, werd door de pilotleerlingen gemiddeld tien p'-punten hoger gescoord. Een verklaring hiervoor zou gevonden kunnen worden in het feit dat in het pilotexamen geen vragen over kansrekening en statistiek worden gesteld en dat er daardoor meer aandacht is voor de combinatoriek. Als we kijken naar de p'-waarden in alle overlapvragen blijkt dat de pilotpopulatie nagenoeg even vaardig is als de reguliere.
De opgave *Hogeschool voor de kunsten* richtte zich op het nieuwe domein Vorm en Ruimte. In de eerste twee vragen moest de verhouding tussen de inhoud van een schaalmodel en het werkelijke kunstwerk worden berekend en bepaald worden wat het aantal mogelijke zijvlakken is dat je ziet als je naar een kubus kijkt. Bij vraag 7, zie figuur 12, werd van de leerlingen gevraagd om uit te leggen dat het kunstwerk in werkelijkheid lager is dan de deur. In de bespreking bleek dat het voor veel leerlingen erg lastig is om een dergelijke redenering begrijpelijk en vooral sluitend op te schrijven, waarmee dit een erg lastig te corrigeren vraag voor docenten was. De tweede mogelijkheid uit het correctievoorschrift om het met een schets van een zijaanzicht te doen, bleek nauwelijks door kandidaten toegepast. In de laatste vraag in deze opgave moest van een foto op de uitwerkbijlage de hoogte waarop deze foto is genomen worden bepaald. De eerste stap, het tekenen van de horizon, is een activiteit die reeds meerdere malen in de afgelopen pilotexamens is voorgekomen. Hier bleek

figuur 12 Uit: vwo C pilot (Hogeschool voor de Kunsten)


Hogeschool voor de Kunsten

Bij de Hogeschool voor de Kunsten in Utrecht stond een kunstwerk in de vorm van een kubus waarvan één hoekpunt is afgezaagd. Er zijn enkele foto's gemaakt met de camera op verschillende hoogte.

foto 1 foto 2

Op foto 1 lijkt het kunstwerk hoger dan de witte deur erachter. Op foto 2 lijkt het kunstwerk ongeveer even hoog als de deur. Foto 2 is op ongeveer 150 cm hoogte genomen. De hoogte van de deur is in werkelijkheid 230 cm.

3p 7 Leg uit dat het kunstwerk in werkelijkheid lager is dan de witte deur.

een aanvulling op het correctievoorschrift noodzakelijk omdat de afrondinstructie in de vraag niet strookte met de toevoeging 'of nauwkeuriger' in het beoordelingsmodel.
In de opgave *Versregels* kwam een klein onderdeel over rijen, wat weer in het examenprogramma is opgenomen, aan de orde. Na een telprobleem en het uitschrijven van een aantal mogelijkheden werd in vraag 11 gevraagd om de gegeven regelmaat door te rekenen. Hoewel dit natuurlijk handmatig mogelijk was, en vermoedelijk ook door veel leerlingen zo opgelost werd, kon dit ook met behulp van een rij op de GR worden berekend. Tijdens de examenbespreking bleek dat slechts een klein deel van de leerlingen zag dat hier eigenlijk gewoon de rij van Fibonacci, die in het lesmateriaal was behandeld, werd neergezet. Met p' = 46 werd dit beschouwd als een moeilijke, maar mooie vraag.
Hoewel de opgave *Keramiek* ook in het reguliere examen voorkwam, is in een tweetal vragen in deze context getracht de gevraagde activiteit denkactiever te maken. Bijvoorbeeld bij vraag 16: waar in het reguliere C-examen rechtstreeks een berekening wordt gevraagd, is in het C-pilotexamen sprake van een vraag waarbij de leerling moet onderzoeken of een gemiddelde temperatuurstijging meer dan twee keer zo groot is. De uiteindelijke p'-waarden bleken trouwens bijna gelijk te zijn.
In de laatste opgave, *Hoogopgeleid?*, werden vragen bij het nieuwe domein Logisch redeneren gesteld. Aan de hand van een strip van Sigmund werd van leerlingen onder andere gevraagd het verband te leggen tussen beweringen met logische symbolen en tekstuele beweringen. De eerste drie vragen met allemaal een maximale score van twee punten, leverden p'-waarden op van 66, 93 en 54. Soms bleek de gevraagde redenering zo eenvoudig dat leerlingen er meer achter zochten, bijvoorbeeld bij vraag 21 waar het volgens een pilotdocent bijna voldoende was geweest om te antwoorden met 'modus tollens'. Een laatste opvallende constatering uit de analyses is dat de correlatie tussen enerzijds de scores op de pilotspecifieke examenonderdelen zoals Vorm en Ruimte en Logisch redeneren en anderzijds de meer traditionele examenonderdelen bijzonder laag was. Het lijkt erop dat de gevraagde vaardigheid op een aantal van deze nieuwe onderdelen een andere is dan bij de rest van het programma.

Vwo B

[Ruud Stolwijk]

Vorig jaar eindigde het gedeelte van het *Euclides*-artikel van de toetsdeskundigen van Cito over het examen vwo wiskunde B als volgt: 'Maar laten we niet vergeten: de leerlingen hebben ook gewoon erg goed gepresteerd! Beter ook dan vorige jaren, zo heeft onderzoek van CvE en Cito aangetoond. [...] 16,5% onvoldoendes en een gemiddeld cijfer van 6,9. Dit is duidelijk hoger dan voorgaande jaren: in 2010 en 2011 was het

gemiddeld cijfer 6,4 en vorig jaar was dit 6,5. Ik (en u ongetwijfeld ook) ben nu al benieuwd hoe het volgend jaar zal zijn...' Welnu, inmiddels weten we het resultaat: Met een N-term van 1,0 leverde het examen vwo wiskunde B dit jaar een gemiddeld cijfer op van 6,6 met 22,3% onvoldoendes. Iets beter dan in 2012, wat minder dan in 2013. Was vorig jaar een positieve uitschieter en zal het nu stabiliseren? We zijn benieuwd hoe het beeld in 2015 zal zijn...
De docenten leken dit jaar wat minder tevreden met het examen vwo wiskunde B dan de afgelopen jaren het geval is geweest. Men vond het examen wat aan de moeilijke kant. Ter herinnering: vorig jaar vond men het examen wat aan de (al te) makkelijke kant; misschien dat dat mede van invloed is geweest op het oordeel van docenten over het moeilijkheidsgehalte van het examen van dit jaar. Verder vond de meerderheid het qua lengte in orde en een minderheid vond het te lang. De afnamegegevens onderschrijven dit beeld; er kan sprake van enige tijdnood zijn geweest, maar niet in al te grote mate. Opvallend was de kritiek op het gebruik van de formulering 'Bewijs', die in ieder geval voor een flink aantal docenten verrassend leek te zijn. Los van de aandacht die door het CvE aan de nomenclatuur is gegeven[8], is het in dit kader wellicht wijs om het artikel in *Euclides* 88-4 over (werk)woorden in de centrale examens nog eens na te lezen en er in de examenklassen aandacht aan te besteden.[7] Uit de *quick scan* blijkt dat een kwart van de 652 docenten het examen een onvoldoende waard vond en het gemiddeld cijfer dat het examen kreeg, was met 6,0 aan de magere kant.
De eerste opgave van het examen, *Bal in de sloot*, begon meteen met een 'Bewijs'-vraag. Driekwart van de kandidaten bleek perfect in staat deze vraag (p' = 86) te beantwoorden. Aangezien de tweede vraag een p'-waarde van 83 scoorde, kan gesteld worden dat er met de keuze van de startopgave dit jaar niet veel mis was.
De eerste vraag van de tweede opgave (*Boven en onder de lijn door de buigpunten*) kende nadrukkelijk de opdracht dat het aantonen van de formule met behulp van primitiveren diende te gebeuren. Het differentiëren van de gegeven functie was hier niet de bedoeling, zo gaf de opmerking bij het correctievoorschrift van vraag 3 ook aan. De aanvulling op het correctievoorschrift, tot stand gekomen na commentaren uit het veld nuanceerde dit enigszins – en terecht. Vraag 4 en 5 zorgden niet voor al te grote problemen en werden 'gewoon tot goed' gemaakt. Een interessante vraag is of de lijn door de buigpunten van een vierdegraadsfunctie altijd een dergelijke vergelijkbare situatie oplevert – maar dat is misschien meer iets voor een andere rubriek in dit blad.[9]
Als derde opgave fungeerde de opgave *Grafiek verdeelt rechthoek*, een bij wiskunde B vwo niet ongewone

Gemeenschappelijk met de x-as

Voor elke waarde van a met $a \neq 0$ is de functie f_a gegeven door $f_a(x) = 2\sin(ax) + \sin(2ax)$. Het punt $(\frac{\pi}{a}, 0)$ is een gemeenschappelijk punt van de grafiek van f_a en de x-as.

4p **13** Bewijs dat voor elke waarde van a (met $a \neq 0$) de grafiek van f_a de x-as in $(\frac{\pi}{a}, 0)$ raakt.

5p **14** Bewijs dat de grafiek van f_2 puntsymmetrisch is in het punt $(\frac{1}{2}\pi, 0)$.

figuur 13 Uit: vwo B (Gemeenschappelijk met de *x*-as)

zeven-punter. Om deze opgave tot een goed einde te brengen, moeten heel wat stappen op de juiste wijze gezet worden, en maar liefst 40% van de kandidaten slaagde daar foutloos in.
De goniometrie kwam op twee plekken in dit examen aan bod, als eerste in de opgave *De ideale stoothoek*. Bij vraag 6 en 7 mocht dan wel moest (in een contextsituatie) de grafische rekenmachine ingezet worden, met goed resultaat (zie de p'-waarden in de tabel). Vraag 8 vroeg om een exacte berekening van een ideale stoothoek in een denkbeeldige situatie, waarbij de kandidaat niet om de afgeleide van goniometrische functies heen kon. Met een p'-waarde van 63 was dat voor de meeste kandidaten geen onoverkomelijk probleem. De tweede opgave waar goniometrie een rol speelde, was de opgave *Gemeenschappelijk met de x-as*. Dat bleek tot veler verrassing (vast niet alleen van de examenmakers zelf) de slechtst gemaakte opgave uit het hele examen. Bij vraag 13 bleek dikwijls over het woord 'raakt' heen gelezen te zijn, met tot gevolg dat bijna driekwart van de kandidaten hier geen punten wist te scoren, zie figuur 13. Verder bleek bij vraag 14 dat het onderwerp puntsymmetrie nog altijd tot het examenprogramma vwo wiskunde B behoort, in tegenstelling tot wat zo hier en daar 'in het veld' te beluisteren viel. Dat 55% van de kandidaten hier geen punten wist te behalen, doet hopelijk niet vermoeden dat dit onderwerp niet meer behandeld zou worden.
Een opmerkelijke opgave was de opgave *Even lang*. In deze opgave werd zowel meetkundig als analytisch een en ander van de kandidaat verwacht – met name bij vraag 12. Het bewijzen dat twee lijnstukken even lang zijn, vereiste gebruik van een gegeven gelijkvormigheid, en dat was voor velen een brug te ver. Dat in dat bewijs netjes alle tussenstappen genoteerd moesten worden, was voor sommige docenten zuur – maar de lijst met examen(werk)woorden is hierin nu eenmaal helder: 'Bewijzen: Een redenering en/of exacte berekening waaruit de juistheid van het gestelde blijkt.' En bij 'exact' valt te lezen: 'Stap voor stap'.
Desalniettemin moet gezegd worden dat de combinatie van analyse en meetkunde, zoals die in deze opgave voorlag, achteraf gezien misschien geen al te gelukkige was. Gelukkig lieten de kandidaten zich hierdoor niet

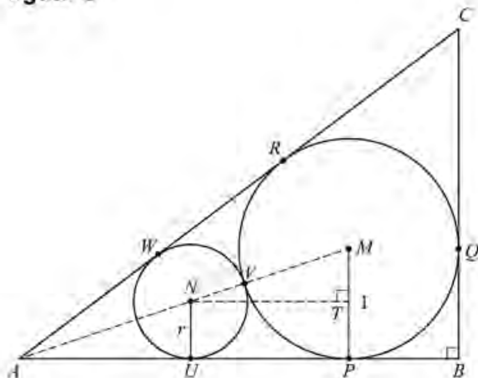
echt van hun stuk brengen, want met een p'-waarde van 94 was de eerstvolgende vraag (vraag 15) de hoogst scorende van het hele examen. De context waarbinnen deze vraag gesteld werd, *Hoogwaterstanden*, vereiste verder bij vraag 16 (p' = 54) verstandig gebruik van de grafische rekenmachine en bij vraag 17 (p' = 60) het vermogen een stelsel van twee vergelijkingen met evenzovele onbekenden op te lossen. De slotvraag van het examen was een meetkundevraag waarvan de titel (*Koordenvierhoek*) al aangaf waar het over ging. Met een (zeker voor meetkunde) keurige p'-waarde van 62 bleek dat de kandidaten over het algemeen netjes aan de eindstreep van dit examen wisten te komen en 44% van hen deed dat bij deze slotvraag zelf foutloos.

Vwo B pilot

[**Ruud Stolwijk**]

Voor de derde keer werd er een pilotexamen vwo wiskunde B afgenomen, met dit jaar 166 kandidaten. Waar er de afgelopen twee jaar wel enige ophef over dit examen was, verliep het dit jaar zonder echte incidenten of bijzonderheden. Wel vonden de pilotdocenten het examen te lang – al werd dat niet door de data bevestigd. Opvallend feit: uit de prestaties op vragen die ook in het reguliere examen zaten (het betreft hier vragen in de opgaven *Bal in de sloot*, *Boven en onder de lijn door de buigpunten*, *Grafiek verdeelt rechthoek* en *De ideale stoothoek*), bleek dat de pilotkandidaten het op deze onderdelen heel wat minder goed deden dan de reguliere kandidaten. De twee (identieke) startvragen scoorden beide meteen al zeven p'-punten lager dan bij het reguliere examen. Dat het gemiddeld cijfer voor de pilotkandidaten iets (om preciezer te zijn: 0,1) lager uitviel dan voor de reguliere lijkt dan logisch: een gemiddeld cijfer van 6,4 en 31,3% onvoldoendes bij een N-term van 1,7.

figuur 14 Uit: vwo B pilot (Cirkels in een driehoek)



Over de overlapopgaven valt een en ander te lezen bij het gedeelte van dit artikel dat het examen vwo wiskunde B regulier als onderwerp heeft. Hierbij zij nog wel opgemerkt dat de eerste vraag van *De ideale stoothoek* in het pilotexamen een andere was, dit om de snelheid bij een bewegend punt onder de aandacht te brengen. Immers, binnen parametervoorstellingen is er in het nieuwe programma vwo wiskunde B nadrukkelijk aandacht voor beweging. Dit viel ook terug te vinden in de opgave *Vierkant op een driehoek*. De p'-waarden (14 en 34) wijzen uit dat deze opgave door de kandidaten als bijzonder moeilijk werd ervaren. Het werken met vectoren, in combinatie met goniometrie, bleek niet eenvoudig.

Een belangrijk onderdeel van het nieuwe programma is natuurlijk het domein Meetkunde met coördinaten – in het veld vaak Analytische meetkunde genoemd. Dit domein kwam aan de orde in de opgave *Cirkels in een driehoek*. De drie vragen van deze opgave betroffen berekeningen en redeneringen aan de hand van Pythagoras en gelijkvormigheid, en uit de p'-waarden (die alle drie rond de 60 lagen) blijkt dat de pilotkandidaten dit redelijk in de vingers hebben. Bovendien bleken de kandidaten met name bij vraag 5 in staat tot een veelheid aan juiste oplossingsmethoden, waar het correctievoorschrift er slechts eentje beschreef. Gelukkig leverde dat geen correctieproblemen op, de verschillende stappen in de diverse oplossingen lieten zich goed onderscheiden en beoordelen, zie figuur 14. Dat vectoren ook bij dit domein horen, moge duidelijk zijn, zie de al genoemde opgave *Vierkant op een driehoek*. Overigens: ook zwaartepunten zijn onderdeel van het nieuwe meetkundeprogramma – maar die kwamen dit jaar niet aan bod in het examen. Wel kwam het inproduct aan bod en wel in de opgave *Gespiegelde raaklijnen*. Met een p'-waarde van 43 vielen de prestaties hier wellicht wat tegen. Op het gebied van de analyse zijn er niet heel veel wijzigingen in het programma te vinden. Eigenlijk is de terugkeer van de perforatie de meest opvallende – maar die zat er dit jaar niet in. Wel werd er gevraagd naar een verticale asymptoot, die uiteraard (zoals het vwo wiskunde B waar mogelijk betaamt) netjes exact moest worden gevonden. Dit in tegenstelling tot de zonder nadere uitleg te geven asymptoten bij het examen havo wiskunde B! De opgave *Gebroken goniometrische functie* vereiste bij de kandidaten kennis van goniometrische functies, asymptoten en (net als in het reguliere examen) puntsymmetrie. Op zichzelf zou deze opgave voor reguliere kandidaten ook best mogelijk moeten kunnen zijn – misschien een tip om deze als oefenopgave in te zetten? Werken met een parameter in een goniometrische situatie is immers een mooie denkactiviteit.

Noten

[1] Zie *www.cito.nl/onderwijs/voortgezet%20onderwijs/centrale_examens*. Hier treft u overigens niet alleen de betreffende tabellen maar uiteraard ook de examens, uitwerkbijlagen en correctievoorschriften aan.
[2] De p'-waarde is de geconstateerde gemiddelde score van een vraag, een opgave of een compleet examen, uitgedrukt in een percentage van de maximumscore van die vraag, opgave of examen.
[3] WOLF: Windows Optisch Leesbaar Formulier
[4] Hier is een kanttekening op zijn plaats: omdat de aantallen in de tabellen en de grafiek gebaseerd zijn op de aanvragen van scholen voorafgaand aan de examens, zijn deze aantallen groter dan de werkelijke: scholen nemen meestal een zekere veiligheidsmarge.
[5] Mocht u geïnteresseerd zijn in deelname aan een dergelijke constructiegroep: elk jaar rond januari wordt er door het Cito geworven voor die constructiegroepen waar er 'vacatures' zijn. Zie daarvoor ook de voornoemde Citosite.
[6] Zie *Euclides*, *88*,(1), 2012.
[7] Drijvers, P., & Tjon Soei Sjoe, K. (2013). (Werk) woorden in de centrale examens, *Euclides*, *88*(4).
[8] Bijvoorbeeld via de *WiskundEbrief*, zie *www.wiskundebrief.nl/examenwoorden.htm*
[9] Uw reacties zijn van harte welkom op *vakbladeuclides@nvvw.nl*

Over de auteurs

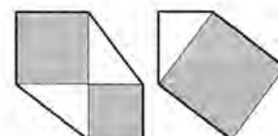
Ivo Claus, Ger Limpens, Melanie Steentjes, Ruud Stolwijk, Harco Weemink zijn wiskundemedewerkers en toetsdeskundigen van het Cito in Arnhem (*www.cito.nl*). Hun e-mailadressen zijn achtereenvolgens: *ivo.claus@cito.nl*, *ger.limpens@cito.nl*, *melanie.steentjes@cito.nl*, *ruud.stolwijk@cito.nl* en *harco.weemink@cito.nl*.

RECTIFICATIE

In nummer 7 van jaargang 89 is helaas bij de boekbespreking *Wiskunde, dat kun je begrijpen* van Ernst Lambeck een illustratie weggevallen. Hieronder alsnog de afbeelding waar in de tekst naar verwezen wordt.

figuur 1 Opgave 6 van hoofdstuk 8 *Aanschouwelijke meetkunde*

6 Leonardo da Vinci bedacht dit bewijs van de stelling van Pythagoras:
Het komt erop neer dat de beide zeshoeken die de vierkanten omsluiten, gelijke oppervlakte hebben.
Verklaar dit.



WIS EN WAARACHTIG

Deze rubriek is een impressie van zaken die van belang zijn voor docenten wiskunde. Wilt u een wetenswaardigheid geplaatst zien, uw collega's op de hoogte brengen van een belangwekkend nieuwsfeit dat u elders heeft gelezen of verslag doen van een wiskundige activiteit? Stuur ons uw tekst, eventueel met illustratie. De redactie behoudt zich het recht voor bijdragen in te korten of niet te plaatsen. Bijdragen naar *wisenwaarachtig@nvvw.nl.*

Hoogleraarbenoemingen Freudenthal Instituut

Bij het Freudenthal Instituut van de Universiteit Utrecht zijn drie nieuwe hoogleraren benoemd. Per 1 juni 2014 is Toine Pieters hoogleraar en algemeen directeur van het instituut. Wouter van Joolingen is op 1 mei aangetreden als hoogleraar en wetenschappelijk directeur. Met ingang van 1 juni is Paul Drijvers in deeltijd benoemd tot hoogleraar in de didactiek van de wiskunde.

SMART-finale Kangoeroe wedstrijd

Dit jaar werd voor het eerst de SMART-finale van Kangoeroe georganiseerd. De beste 30 deelnemers van groep 7 en 8 werden uitgenodigd om op dinsdag 10 juni deel te nemen aan deze finale. In museum Boerhaave in Leiden streden uiteindelijk 58 leerlingen, 32 uit groep 7 en 26 uit groep 8, voor een plaatsje bij de eerste drie van hun groep.
De finale werd gespeeld over twee rondes, een met zestien meerkeuzevragen en een met acht open vragen. Na een spannende en enerverende dag werden Per Schrijver (Amstelveen), Simon Schaap (Zuidwolde) en Jonathan Poot (Amersfoort) de drie besten van groep 7. Charlie Tang (Eindhoven), Liam van den Berg (Emmen) en Rafael Houkes (Leiden) eindigden als beste drie in groep 8. Het maximale puntenaantal was 54. Het gemiddelde in groep 7 was 24 en in groep 8 32 punten. Volgend jaar wordt de SMART-finale in NEMO in Amsterdam georganiseerd. De opgaven zijn te vinden op *www.w4kangoeroe.nl/kangoeroe/historie/smart-finale/*



Groot tekort aan wiskundeleraren in Nederland

In Nederland is een groot tekort aan wiskundeleraren. Wiskundigen worden door het bedrijfsleven weggekaapt met hoge salarissen en betere loopbaanperspectieven. Dat bevestigt het Platform Wiskunde Nederland (PWN) na berichtgeving in het *Algemeen Dagblad*. Volgens het platform is er sprake van een groot probleem. In de eerste vier maanden van 2014 stonden er in totaal 298 vacatures open voor wiskundedocenten op scholen in het voortgezet onderwijs. Volgens cijfers van vacaturebank MeesterBaan gaat het om een verdubbeling in vier jaar tijd. Het PWN en de Nederlandse Vereniging voor Wiskundeleraren maken zich zorgen: terwijl er in 2013 behoefte was aan 528 docenten, kwamen er slechts 210 wiskundeleraren bij op de arbeidsmarkt. Werkgeversorganisatie VO-Raad onderkent het probleem. 'Een oplossing kan zijn om de opleiding in te korten en specifieker te richten op onderwijs', zegt Remco van der Hofstad, hoogleraar kansberekening en woordvoerder van het PWN tegen *NU.nl*. 'Bovendien moet er gewerkt worden aan de status van leraren in Nederland. Dat is een specifiek probleem in ons land en het grootste onder de technische disciplines. Het moet aantrekkelijker gemaakt worden om leraar te worden.' Bron: *www.nu.nl*

Stand van zaken van het wiskundig-didactisch onderwijsonderzoek zorgelijk

In het najaar van 2013 heeft het bestuur van het Platform Wiskunde Nederland een commissie ingesteld die gevraagd werd een inventarisatie uit te voeren van de stand van zaken van wiskundig-didactisch onderwijsonderzoek in Nederland, van fondsen en middelen voor wiskundig-didactisch onderwijsonderzoek, en van onderzoeksthema's voor de toekomst, alsook om een voorstel te doen voor vervolgstappen ter bevordering van wiskundig-didactisch onderwijsonderzoek in Nederland. In het eindrapport van deze commissie wordt onder andere geconcludeerd dat de stand van zaken van het wiskundig-didactisch onderwijsonderzoek in Nederland zorgelijk is: de beschikbare formatie op de verschillende universiteiten is te beperkt. Het rapport bevat aanbevelingen om deze situatie te verbeteren. Het PWN-bestuur zal een aantal van deze aanbevelingen overnemen, met name betreffende het bevorderen van het aantal leerstoelen wiskundedidactiek. Bron: *www.wiskundeonderwijs.nl*



MEDEDELING



BESTE RESULTAAT OOIT VOOR NEDERLAND BIJ INTERNATIONALE WISKUNDE OLYMPIADE



Nederland heeft geschiedenis geschreven bij de Internationale Wiskunde Olympiade 2014 in Zuid-Afrika. Drie teamleden wisten een gouden medaille binnen te halen en dat is nog nooit eerder gelukt. Jeroen Winkel (17) was de beste Nederlander met 32 punten, op de voet gevolgd door Peter Gerlagh (18) met 31 punten en Michelle Sweering (17) met 29 punten. Michelle was hiermee wereldwijd het enige meisje dat een gouden plak ontving. De overige drie Nederlandse teamleden behaalden twee zilveren en een bronzen medaille. Nederland eindigde hiermee historisch hoog: op de 13e plek van de 101 deelnemende landen en als beste West-Europese land.
De Internationale Wiskunde Olympiade vond van 6 tot 13 juli plaats in Kaapstad, Zuid-Afrika. Op elk van de twee wedstrijddagen kregen de leerlingen drie opgaven van hoog wiskundig niveau voor hun kiezen, waar ze vier en een half uur aan konden werken. Voor elke opgave waren zeven punten te behalen. Michelle Sweering was één van de slechts 15 deelnemers die de allermoeilijkste opgave wisten op te lossen.

Het Nederlandse team was dit jaar uitzonderlijk sterk: alle zes leerlingen haalden een medaille. De resultaten van de afzonderlijke leerlingen zijn als volgt:

- 32 punten – goud: Jeroen Winkel (17 jaar, Nijmegen, 6 vwo, Stedelijk Gymnasium Nijmegen)
- 31 punten – goud: Peter Gerlagh (18 jaar, Tilburg, 6 vwo, Theresia Lyceum Tilburg)
- 29 punten – goud: Michelle Sweering (17 jaar, Krimpen aan den IJssel, 6 vwo, Erasmiaans Gymnasium Rotterdam)
- 23 punten – zilver: Bas Verseveldt (17 jaar, Tilburg, 6 vwo, Theresia Lyceum Tilburg)
- 22 punten – zilver: Matthew Maat (14 jaar, Enschede, 4 vwo, Bonhoeffer College Enschede)
- 18 punten – brons: Tysger Boelens (18 jaar, Ter Apel, 6 vwo, RSG Ter Apel)

Daarnaast reisde Bob Zwetsloot (16 jaar, Noordwijkerhout, 5 vwo, Teylingen College Leeuwenhorst) mee als winnaar van de aanmoedigingsprijs. Deze prijs is mogelijk gemaakt door het Freudenthal Instituut. Bob kan volgend jaar in Thailand een gooi doen naar een medaille.



Van de 560 deelnemers ontvingen er in totaal 133 deelnemers een bronzen medaille, 113 een zilveren medaille en 49 een gouden medaille. Het officieuze landenklassement werd aangevoerd door China, de Verenigde Staten en Taiwan. Met Japan (5e) erbij zijn dit de enige landen die meer gouden medailles wisten te bemachtigen dan Nederland.

Het Nederlandse team met hun medailles.
V.l.n.r.: Bob, Michelle, Matthew, Peter, Bas, Jeroen, Tysger

GETUIGEN

Danny Beckers

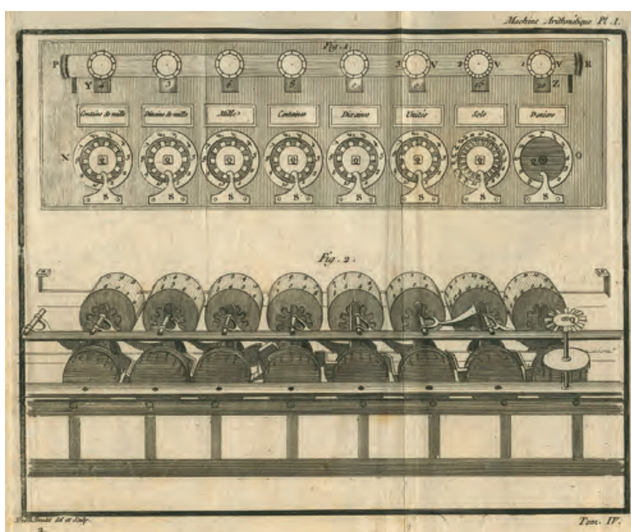
PASCALINE

Wiskundeonderwijs bestaat al eeuwen. Niet op dezelfde manier, niet met dezelfde doelen, en niet met hetzelfde idee achter het nut van dat onderwijs, maar op een bepaalde manier heeft het bestaan. Biografieën, aantekeningen, artefacten, films en boeken getuigen van dat onderwijs. In de serie Getuigen behandelt Danny Beckers dergelijke historische snippers, en plaatst hun betekenis in de context van die tijd.



Aan het begin van het schooljaar, net terug van haar eerste lesdag, vertelde mijn brugklas-dochter me dat er tijdens de rekenlessen alleen uit het hoofd en op papier mocht worden gerekend. Ze was er een tikkeltje benauwd over, want ze is geen sterke rekenaarster. Ze realiseerde zich dat het gebruik van de rekenmachine thuis weliswaar gemak kon bieden bij het maken van huiswerk, maar dat ze zichzelf daarmee benadeelde omdat ze dan tijdens een toets niet goed was voorbereid.
Het vertrouwen dat de hedendaagse leerling in de rekenmachine stelt, was tot in de negentiende eeuw vreemd aan de meeste inwoners van Europa. Machines waren juist curieuze dingen, die veelal werden gewantrouwd. Machines waren duur en zodoende voor de meesten niet bereikbaar. Onbekend maakte ook toen al onbemind. Voor goed opgeleide, welgestelde Europeanen waren machines juist aantrekkelijk. Zij kenden en bewonderden bijvoorbeeld het radarwerk dat schuilging achter het uurwerk. In uurwerken werden wijzers geroteerd en via een mechanisme, waarbij de kleine wijzer op een as dóór de as van de grote wijzer werd voortbewogen, met tandwielen zo op elkaar afgestemd dat ze de wijzers precies volgens de verhouding uren en minuten roteerden. In de zeventiende eeuw werd het slingeruurwerk dusdanig populair dat het radarwerk van het apparaat zelfs werd gebruikt als metafoor voor het leven en de Schepping. Tandwielconstructies werden al langer toegepast in molens, maar de precisie die nodig was om een uurwerk op de juiste manier te laten lopen, werd herkend en gewaardeerd door de intelligentsia.

figuur 1 Pascaline, opengewerkt invoermechanisme, plaat I uit de *Oeuvres Completes* (1779)

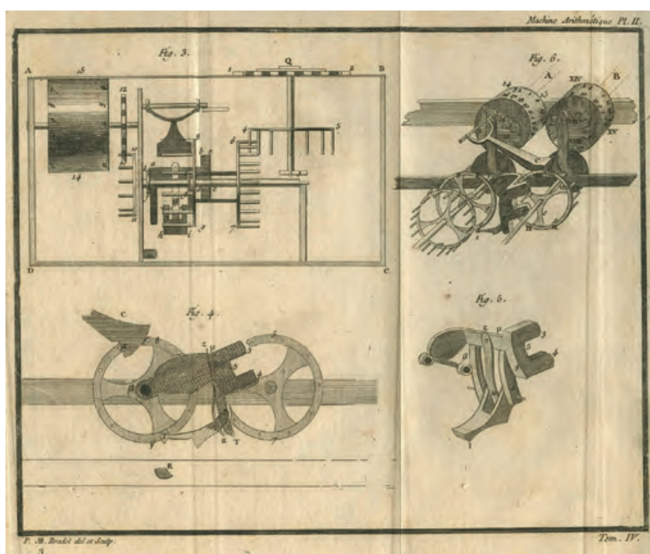


De eerste pogingen om een rekenmachine te bouwen, werden verricht door mensen die veel rekenden: astronomen, landmeters en boekhouders. Zij probeerden een 'rekenklok' te bouwen, zoals ze dat zelf noemden, en die naam was veelbetekenend. De meest succesvolle manieren om rekenwerk te versnellen waren echter niet mechanisch, waaronder de logaritmetabel en de daarop gebaseerde rekenlineaal die in kleine kring werden gebruikt. Er waren twee onderdelen in de mechanische rekenmachine nodig die het mechanisme beduidend lastiger maakten dan een uurwerk. Op de eerste plaats moest de getalinvoer niet direct gekoppeld zijn aan de uitvoer. Daartoe was het dus nodig dat de asjes van de invoerwieltjes konden worden losgekoppeld van de asjes van de uitkomstwieltjes. Daarnaast was het belangrijk dat een overdrachtsysteem zorgde voor de overdracht van een cijfer naar een kolom van hogere orde, wanneer een wieltje helemaal rond was gedraaid.

Zowel Blaise Pascal (1623-1666) als een aantal van zijn tijdgenoten vonden het een uitdaging om te pogen een rekenmachine te bouwen. In 1645 presenteerde Pascal zijn *machine arithmétique*, die geldbedragen in Franse Francs kon optellen en aftrekken, precies het soort berekeningen die zijn vader in diens rol van belastingopziener voortdurend moest maken. In 1649 kreeg hij een koninklijk privilege waarmee hij als enige in het Franse rijk rekenmachines mocht maken en verkopen. Hij publiceerde een boekje met daarin alle technische details opdat potentiële kopers zich konden verdiepen in het mechanisme. Met name het overdrachtsmechanisme en de



figuur 2 Pascaline (Musée des Arts et Métiers, Parijs)



figuur 3 Pascaline, detail van het overdrachtmechanisme, plaat II uit de *Oeuvres Completes* (1779)

koppeling tussen invoer en uitvoer waren daarin in detail uitgewerkt. Het apparaat kwam bekend te staan als de *Pascaline*.

De Pascaline werd geen commercieel succes. De productie van de apparaten was prijzig, zodat het bezit van het apparaat vooral als een statussymbool werd gezien. Maar bovendien werd door het grootste deel van de bevolking een rekenaar betrouwbaarder geacht. In de hogere sociale klassen kwam men wel geregeld met techniek in aanraking, maar de meeste mensen zagen zelden of nooit een machine die ingewikkelder was dan een koets; het raderwerk van een molen of een klok was voor de meesten een groot raadsel, en men stelde meer vertrouwen in de eigen tijdbeleving dan in die van de kerkklok – hoezeer die het leven in de stad ook kon domineren. Het wantrouwen in het functioneren van technische artefacten was groot. Niet helemaal onterecht: de kerkklok werd geregeld handmatig bijgesteld.
In dat opzicht was de rekenmachine van Pascal tamelijk betekenisloos. De machine was te weinig flexibel voor de mensen die veel rekenwerk verrichtten. Die gebruikten liever een logaritmetabel. Door mensen die minder opleiding hadden genoten en niet wisten hoe logaritmen werkten, werd de rekenmachine van Pascal als duur of onbetrouwbaar beschouwd. Stelde een koopman zelf vertrouwen in het apparaat, dan had hij nog het wantrouwen van zijn klanten te overwinnen. Bovendien moesten kooplieden en winkeliers ook met verschillende maten en gewichten kunnen rekenen, soms zelfs met verschillende munten. De Pascaline was gemaakt om te rekenen in Franse Francs; de Franc bestond uit twaalf sol, die weer bestond uit twintig sou. In de Nederlanden werd bijvoorbeeld gebruikgemaakt van de gulden, die bestond uit twintig stuivers, die elk zes penningen waard waren (afhankelijk van de streek waren er ook wel acht of twaalf penningen in een stuiver), en een penning bestond dan weer uit twee oortjes. Natuurlijk was het principe van al die rekenmachines hetzelfde, maar het rekenwerk om het ene muntstelsel om te rekenen in het ander bleef bestaan – of vergde een nieuwe (dure) machine.

Binnen het onderwijs vond de rekenmachine ook geen plek. Het onderwijs was te zeer gericht op de toekomstige beroepspraktijk van de leerlingen, en zolang de Pascaline daar geen deel van uitmaakte was het natuurlijk niet zinnig om daar aandacht aan te besteden. Dat veranderde pas in de negentiende eeuw, met het ontstaan van het algemeen vormend onderwijs. Maar toen was de overtuiging dat die vorming juist door het zelfstandig rekenen werd bevorderd dusdanig groot dat het tot in de tweede helft van de twintigste eeuw zou duren alvorens een rekenmachine in het leslokaal werd getolereerd, anders dan als curiosum. In de kantoor- en winkelpraktijk was het vertrouwen in de (mechanische en later elektronische) rekenmachine en kassa toen inmiddels doorgedrongen. Het is opmerkelijk hoe snel kinderen vertrouwen in techniek stellen – ook al doorzien ze er de werking niet van. Mijn brave brugklasser vond het een troostrijke gedachte dat ze tijdens het huiswerk maken wel achteraf op de rekenmachine kon controleren of ze het goed had gedaan. Menig zeventiende-eeuwse leerling zou geneigd zijn geweest om juist de machine te controleren met het rekenwerk op papier, als ze al op de hoogte waren geweest van het bestaan van de apparatuur! Maar wellicht speelt hier ook een rol dat goed rekenwerk tegenwoordig geen garantie meer is voor een goede baan: ook de rest van de wereld stelt meer vertrouwen in een machine.

Over de auteur

Danny Beckers is voormalig wiskundedocent, consultant/ontwikkelaar passend onderwijs en universitair docent wetenschapsgeschiedenis aan de Vrije Universiteit Amsterdam. In die laatste hoedanigheid ligt zijn interesse vooral bij de geschiedenis van het wiskundeonderwijs. E-mailadres: *d.j.beckers@vu.nl*

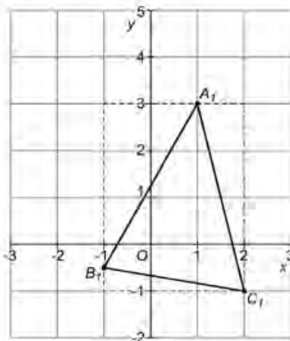
OPPERVLAKTE BEREKENEN MET INLIJSTEN

David van Wijk

Bij het corrigeren van een examenopgave vmbo liep David van Wijk tegen een redenering aan die hem aan het denken zette.

Het ging om opgave 14 van het eerste tijdvak van het vmbo-examen, zie figuur 1. De opgave is om met een berekening te laten zien dat de oppervlakte van driehoek *ABC* gelijk is aan 5,75 cm². De leerlingen worden daarbij met een tekening van driehoek *ABC* met een getekende rechthoek eromheen op het spoor van 'inlijsten' gezet. De coördinaten van punt *B* zijn (–1,–½).
Hoewel inlijsten veel geoefend is in de onderbouw, kwamen veel van mijn leerlingen niet op de juiste aanpak. Ook Brent kwam er niet uit. Hij schreef op '3 x 4 = 12'. Vervolgens deelde hij door 2 en kwam uit op 6. Dat beviel hem kennelijk niet, want hij noteerde: 'Punt *B* ligt 0,5 hoger dan punt *C*, dus moet er nog wat af: 0,5 : 2 = 0,25. Dus is de oppervlakte 6 – 0,25 = 5,75.' Brent rekende waarschijnlijk naar het antwoord toe, maar ik vermoedde in zijn redenering een wetmatigheid. Uiteraard ging ik onderzoeken of dat zo was.
Ik ontdekte dat zijn (ongefundeerde) idee ook klopt als punt *B* hoger of lager ligt, zie figuur 2. Zo is de oppervlakte van driehoek *ABC* bij *B* = (–1,0), gelijk aan 6 – ½·1 = 5,5 cm². Neem je voor de hoogte van *B* ten opzicht van *C* de variabele *x*, dan is de oppervlakte van driehoek *ABC* zoals Brent (ongemotiveerd) beweerde inderdaad gelijk aan 6 – ½*x*.
Toen was mijn nieuwsgierigheid echt gewekt. Elke willekeurige driehoek kan worden beschreven vanuit één van de hoekpunten met de waarden *x* en *y*, zie figuur 2. Valt er een formule af te leiden voor de oppervlakte van driehoek *ABC* uitgedrukt in *a*, *b*, *x* en *y*? En – als dat zo is – komt dan ½*ab* – ½*xy* tevoorschijn?

4p 14 Om de oppervlakte van driehoek $A_1B_1C_1$ te berekenen, kun je een om de driehoek heen getekende rechthoek gebruiken. Zie de schets. Elk hokje stelt 1 cm² voor.
De coördinaten van B_1 zijn (−1; −0,5).

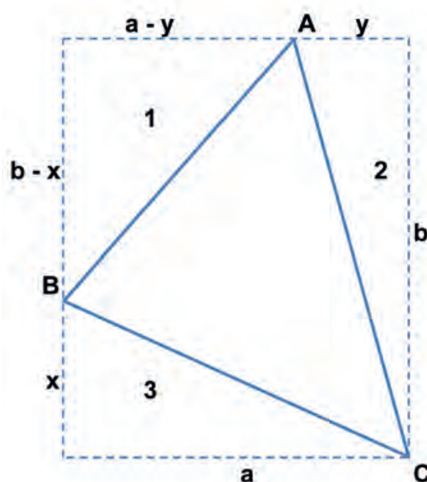


→ Laat met een berekening zien dat de oppervlakte van driehoek $A_1B_1C_1$ gelijk is aan 5,75 cm². Schrijf je berekening op.

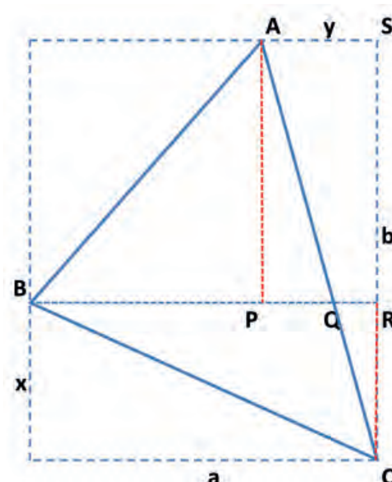
figuur 1 Uit: vmbo GL en TL 2014 (Serie driehoeken)

Een afleiding gebaseerd op inlijsten:
Opp. rechthoek = *ab*
Opp. 1 = ½ (*a* – *y*)(*b* – *x*) = ½*ab* – ½*ax* – ½*by* + ½*xy*
Opp. 2 = ½*by*
Opp. 3 = ½*ax*
Opp. driehoek *ABC* = *ab* – ½*ab* + ½*ax* + ½*by* – ½*xy* – ½*by* – ½*ax*
De oppervlakte van driehoek *ABC* = ½*ab* – ½*xy* (!)

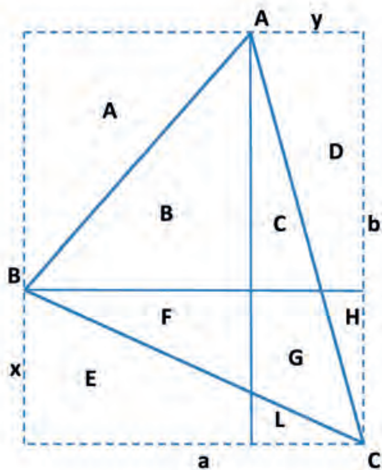
Een afleiding gebaseerd op gelijkvormigheid:
Een collega deed het anders, zie figuur 3. De oppervlakte van driehoek *ABC* is gelijk aan (de oppervlakte van)



figuur 2



figuur 3



figuur 4

driehoek BQA + driehoek BQC. Deze driehoeken hebben BQ als gemeenschappelijke basis en de hoogten AP en CR zijn samen b.

De oppervlakte van driehoek $ABC = ½ \cdot BQ \cdot b$
$BQ = a - QR$ en QR is te bepalen met de gelijkvormigheid van driehoek CRQ en driehoek CSA:
$QR : AS = CR : CS$
$QR : y = x : b$ zodat $QR = \frac{xy}{b}$
Dat maakt
$BQ = a - \frac{xy}{b} = \frac{ab - xy}{b}$

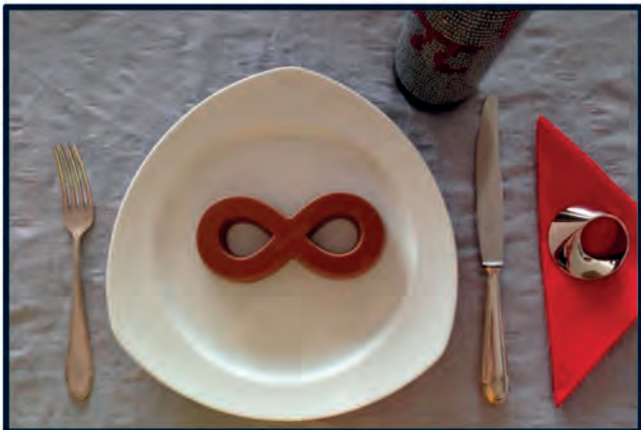
De oppervlakte wordt dus gelijk aan

$$\frac{ab - xy}{b} \cdot b \cdot ½ = ½ab - ½xy$$

Nog een elegante afleiding
Een andere collega raakte ook in de ban van het probleem en bedacht (midden in de nacht!) een elegant meetkundig bewijs, zie figuur 4.

De oppervlakte van driehoek $ABC = B + (C + G) + F$ met B de oppervlakte van B, enzovoort.
$B = ½(A + B) = ½A + ½B$
$C + G = ½(C + D + G + H + L) - L = ½C + ½D + ½G + ½H - ½L$
$F = ½(E + F + G + H + L) - G - H = ½E + ½F - ½G - ½H + ½L$
Samen maakt dit: oppervlakte van driehoek $ABC =$ $½ (A + B + C + D + E + F + G + H + L) - ½ (G + H + L) = ½ab - ½xy$

Brent weet inmiddels wat hij heeft veroorzaakt. Hij gaat volgend jaar naar 4 havo en is van plan docent aardrijkskunde te worden. Het enthousiasme dat hij bij ons veroorzaakt heeft, lijkt een goed begin.


Op de jaarlijkse studiedag van de NVvW ligt de nieuwe oogst weer in mijn kraam. Dit cursusjaar: de *Infinity* en *Choco-pi.*

Kenners zijn dolenthousiast: "Ik heb er al tien op vandaag."

Verkoop: http://hanswisbrun.nl

TASTYMATHS

Over de auteur

David van Wijk is docent wiskunde op het C.S.G. Jan Arentsz te Alkmaar. E-mailadres: *DvWijk@ja.nl*

NASCHOLINGSACTIVITEITEN VAKSTEUNPUNTEN
NIEUWE EXAMENPROGRAMMA'S

Voor de wiskundevakken op havo en vwo worden nieuwe examenprogramma's ingevoerd. Het gaat om wiskunde A, B en D voor havo in leerjaar 4 in september 2015, en om wiskunde A, B, C en D voor vwo in leerjaar 4 in september 2015. De SLO, het Platform Wiskunde Nederland (PWN) en de vaksteunpunten wiskunde werken samen om scholen en docenten te informeren over de nieuwe programma's en inhoudelijk bij te scholen. In het overzicht hieronder ziet u enkele activiteiten van vaksteunpunten wiskunde waar u komend schooljaar aan kunt deelnemen. Nog niet alle data zijn bekend, maar u kunt er alvast rekening mee houden. Aan de activiteiten kunnen kosten zijn verbonden.

Websites

- via *www.youtube.com/channel/UC9cvoam35FszZ_xPFrOiEdw* kunt u de belangrijkste aspecten van de vernieuwing in korte clips bekijken;
- voor informatie van de SLO over de invoering kunt u terecht op *www.betanova.nl*. Hier vindt u de brochure die de SLO naar alle scholen heeft gestuurd over de invoering van de nieuwe examenprogramma's wiskunde;
- op *www.platformwiskunde.nl* vindt u informatie over de vaksteunpunten wiskunde en nascholingsactiviteiten rond het examenprogramma en hoe u contact kunt opnemen met de vaksteunpunten;
- op *www.betasteunpunten.nl* vindt u alle activiteiten van steunpunten, ook van andere vakken.

Onderwerp	Vorm	Vaksteunpunt/inlichtingen	Data
Statistiek in het nieuwe programma	Netwerkbijeenkomst Sprekers: Fetsje Bijma en Carel v.d. Giessen	Amsterdam Bart Zevenhek	29 september 2014 Tijd: 16:00-20:00
Analytische meetkunde	Cursus, ontwikkeld door drie TU's	Eindhoven (TU) Hans Sterk	30 september, 14 oktober, 11 november, 18 november 2014 Tijd: 16:30-19:30 uur
Analytische meetkunde	Cursus, ontwikkeld door drie TU's	Zuid-Holland (Delft, in samenwerking met Leiden) Wim Caspers	2 oktober, 30 oktober, 20 november 2014 Tijd: 16.00-20.00 uur
Statistiek	Cursus	Oost (UTwente) Gerard Jeurnink	9 oktober, 30 oktober, 20 november, 11 december 2014 Tijd: 16:00-20.00
Effectief omgaan met de (nieuwe) lesmethoden	Netwerkbijeenkomst	Noord (NHL Leeuwarden) Jelle Nauta	22 oktober 2014
Wiskundige denkactiviteiten in de nieuwe programma's wiskunde havo en vwo	Cursus voor havo en vwo docenten	Utrecht (Universiteit) Mieke Abels/Paul Drijvers	18 september, 9 oktober, 27 november 2014 Tijd: 15:00-19:00 incl. eenvoudige maaltijd
Nieuwe examenprogramma's (invulling volgt later)	Netwerkbijeenkomst	Amsterdam Bart Zevenhek	2 februari 2015 Tijd: 16:00-20:00
Statistiek	Cursus	Zuid-Holland (Delft, in samenwerking met Leiden) Wim Caspers	januari-februari 2015, drie bijeenkomsten, data volgen
Analytische meetkunde	Cursus, ontwikkeld door drie TU's	Oost (Utwente) Gerard Jeurnink	12 februari, 5 maart, 19 maart, 2 april 2015
Logisch redeneren, vorm en ruimte	Cursus, voor docenten wiskunde C-vwo en wiskunde D-havo	Utrecht (Hogeschool) Theo van den Bogaart/ Quintijn Puite	10 maart, 24 maart, 7 april, 21 april 2015 Tijd: 15:00-19:00 incl. eenvoudige maaltijd
Wiskundige denkactiviteiten	Cursus	Zuid-Holland (Delft, in samenwerking met Leiden) Wim Caspers	maart-april 2015, drie bijeenkomsten

HET VWO EXAMEN WISKUNDE A

EN EEN KLEIN BEETJE C

Zwaantje Warmelink

In dit artikel beschrijft Zwaantje Warmelink wat haar is opgevallen aan het wiskunde A-examen, met aan het eind nog een opmerking over het wiskunde C-examen.

Vooraf

Elk jaar is het weer spannend, hoe ziet het examen er uit? En nog veel belangrijker: hoe maken mijn leerlingen het? Op de een of andere manier vind ik het examen van dit jaar niet mooi. Ik vind het eenzijdig, met hier en daar wel erg simpele vragen. En mijn leerlingen? Die hebben zich er netjes doorheen gewerkt.[1]

Chips

De eerste opgave van het examen wiskunde A is een mooie binnenkomer: drie min of meer standaardvragen over normale verdelingen. Geruststellend voor mijn leerlingen; van sommigen is het zelfvertrouwen voor wiskunde niet zo groot. De $\sqrt{n}$ -wet moet een keer gebruikt worden, maar ook als leerlingen die vergeten, kunnen ze nog wel wat met de vraag. Vraag 4, waarin een hypothese getoetst wordt met binomiale kansen, sluit goed aan op wat we behandeld hebben. Bij deze opgave zit ik al wel direct in de afrondproblematiek. Vinden we het goed, dat leerlingen met afgeronde getallen verder werken en vervolgens in het eindantwoord een afwijking hebben? Mijn tweede corrector en ik kijken hier verschillend tegenaan. We komen er samen wel uit, maar het lukt ons als wiskundeleraren maar niet om daar één lijn in te trekken.

Keramiek

'Wat een loeder', aldus een collega op het forum over deze opgave. En inderdaad, dit vond ik de meeste tijd- en energievragende opgave van het examen. Het gaat over tellen, differentiëren, redeneren en exponentiële groei. Het goed lezen valt bepaald niet mee voor de leerlingen en ook niet voor mij. Vraag 11 is te lang om hier te bespreken, maar daar ligt het allemaal wel heel subtiel! In vraag 9 moet door gebruik van de formule van de afgeleide $v' = \dfrac{-17196{,}8}{(8{,}16T - 17360)^2}$ een steeds sterker wordende daling aangetoond worden. Bij de centrale bespreking wordt opgemerkt, dat een schets van de afgeleide functie makkelijker tot succes leidt dan het redeneren met de formule van de afgeleide functie. Het kwadraat en het feit, dat T kleiner is dan ongeveer 1400 °C, maken de redenering inderdaad erg lastig. Ik

tabel

tijdstip t na het uitzetten van de oven	0 uur	4 uur	8 uur
oventemperatuur (in °C)	650	225	90
verschil V tussen oventemperatuur en omgevingstemperatuur (in °C)	630	205	70

Omdat het verschil tussen oven- en omgevingstemperatuur, dus V, bij benadering exponentieel afneemt, kan dit verschil worden beschreven met de formule:

$$V = b \cdot g^t$$

Hierin is V het verschil tussen oven- en omgevingstemperatuur in °C en t de tijd in uren na het uitzetten van de oven.

6p 12 Bereken met behulp van deze formule hoeveel minuten na het uitzetten van de oven deze is afgekoeld tot 30 °C.

figuur 1 Uit: vwo A 2014 (Keramiek)

zoek en bedenk al een paar jaar extra opgaven/oefeningen over dit onderwerp, maar komend jaar moeten we hier nog maar iets steviger mee aan de slag. In vraag 12, zie figuur 1, moet met behulp van de waarden voor de *verschiltemperatuur* een formule voor exponentiële groei worden opgesteld. Vervolgens moet een vergelijking worden opgelost. De examenmakers hebben al problemen voorzien, want in het correctievoorschrift staat vermeld, dat bij gebruik van de waarden voor de *oventemperatuur* maximaal drie van de zes scorepunten voor deze vraag gegeven kunnen worden. Veel leerlingen van mij, en ook van mijn collega's, gebruiken tot mijn verbazing waarden van de oventemperatuur en van de verschiltemperatuur door elkaar. Op het forum wordt veel heen- en weergepraat over wanneer welke aftrek moet plaats vinden. Wanneer is iets een schrijffout, wanneer zijn de waarden van de oventemperatuur gebruikt? Jammer, dat leerlingen die op zich uitstekend met exponentiële groei kunnen werken, hier zoveel punten verliezen door het fout aflezen van de tabel. Was dat de bedoeling?

Ontslagvergoeding

In deze opgave moet gerekend worden met een formule voor de hoogte van de ontslagvergoeding, waarin het aantal gewogen dienstjaren, het maandsalaris en een correctiefactor worden meegewogen. En dit volgens een oude en een nieuwe regeling. Na wat berekeningen bij de vragen 5 en 6 moet bij vraag 7 onderzocht worden of er een situatie mogelijk is waar de werknemer erop vooruit-

gaat bij de nieuwe regeling. Volgens het correctiemodel is dit niet mogelijk. Maar dan meldt een collega op het forum, dat hij een leerling heeft die een tegenvoorbeeld vindt: als een werknemer in dienst is van vier maanden voor zijn veertigste verjaardag tot vier maanden erna, gaat hij er in de nieuwe regeling op vooruit. Het duurt even voor andere bezoekers van het forum overtuigd zijn, maar hij heeft inderdaad gelijk! Na melding komt er een reactie van het CvE: ook dit antwoord moet goed gerekend worden. Toch wel erg, dat noch het CvE, noch het merendeel van de collega's dit heeft doorzien! Was het niet logischer geweest om alle leerlingen het volle puntenaantal voor deze vraag toe te kennen?

Toevalvoetbal

Op de examenbespreking vroegen we ons af of voetballiefhebbers ook bevoordeeld zijn bij de vragen 17 en 18, zie figuur 2. Een kleine, niet-representatieve steekproef in mijn 5 atheneum-groep levert, dat de voetballiefhebbers wel heel vlot de correcte antwoorden op deze vragen weten te geven en dat de andere leerlingen er toch wat langer over doen. In WOLF staat bij de leerlinggegevens het geslacht. Hier kan dus statistiek op worden losgelaten! Ik ben benieuwd of jongens, die gemiddeld genomen meer met voetbal bezig zijn, deze opgaven relatief beter gemaakt hebben.


De 18 ploegen hebben een hele competitie tegen elkaar gespeeld, dat betekent dat elke ploeg tegen elke andere ploeg een thuiswedstrijd en een uitwedstrijd heeft gespeeld.

3p 17 Bereken hoeveel wedstrijden er in totaal zijn gespeeld.

Voor een overwinning krijgt een ploeg 3 punten, voor een gelijkspel 1 punt en voor een verliespartij geen punten.
De kampioen, AZ, heeft 4 wedstrijden verloren en in de overige 30 wedstrijden 80 punten gehaald.

4p 18 Bereken hoeveel wedstrijden AZ gewonnen heeft.

figuur 2 Uit: vwo A 2014 (Toevalvoetbal)

In vraag 20 staat nog eens een normale verdeling, nu met continuïteitscorrectie. In het correctiemodel staat het antwoord $4 \cdot 10^{-6}$ (of nauwkeuriger). Maar mijn leerlingen schrijven door tot 0,000004379. Ook de leerlingen van de school waarvoor ik de tweede correctie doe, schrijven zo ver door. Met dit verschil, dat zij als laatste cijfer een 5 hebben staan. In eerste instantie ben ik erg verbaasd, dat deze leerlingen allemaal hetzelfde afwijkende antwoord hebben. Totdat ik me realiseer, dat zij een ander merk grafische rekenmachine gebruiken. En ja hoor, even intikken en wat blijkt? De verschillende merken rekenmachines geven hier deze verschillende antwoorden. Weer wat geleerd!
Op het forum komt de vraag langs of 0,0000 ook goed gerekend mag worden. Na enig uitzoekwerk van collega's is de conclusie, dat dit mag.

Wiskunde C

Over het wiskunde C-examen is zowel op de centrale examenbespreking als op het forum opgemerkt, dat het niet goed aansluit bij de geoefende en behandelde stof; er wordt al (te veel) geanticipeerd op het nieuwe programma van 2015. Opvallend vind ik, dat deze klacht vooral komt van de gebruikers van één methode. Dat de N-term voor het pilotexamen (0,9) dit jaar lager is dan die voor het reguliere examen (1,4), zegt in mijn ogen wel wat.
Over de prestaties van mijn twee wiskunde C-leerlingen ben ik zeker tevreden. Zij konden goed uit de voeten met dit examen.

Noot

[1] De volledige examens, correctievoorschriften en verslagen van de centrale examenbespreking zijn te vinden via *www.nvvw.nl/17148/examens.*

Over de auteur

Zwaantje Warmelink is docent wiskunde aan het Augustinuscollege te Groningen. E-mailadres: *z.warmelink@csg.nl*

KLEINTJE DIDACTIEK

Bij het leren van algebraïsche vaardigheden besteden methoden te weinig aandacht aan het ontwikkelen van samenhang. Dit kan bijvoorbeeld in de vorm van schema's ([1], blz. 74). Zo'n schema bij het oplossen van kwadratische vergelijkingen voor het begin van 3 vwo (en later in het schooljaar ook 3 havo) staat op *vakbladeuclides.nl/901boels*. De vraag is eerst: tot welk type hoort de vergelijking, is het een tweeterm of drieterm? En daarna*:* waaraan kun je zien welk type tweeterm (of drieterm) het is? Later kan dit schema worden uitgebreid met andere typen, zoals $A^2 = B^2$ (bijvoorbeeld $(x - 3)^2 = (x + 1)^2$) of $A^n =$ getal (machtsvergelijkingen). In plaats van alle rijtjes oefenopgaven te maken, laat ik leerlingen een deel van de rijtjes maken en stel ik bij een ander deel bovenstaande vragen. Ook gaan we zoeken naar 'fopvergelijkingen'. Dit zijn vergelijkingen die wel uitnodigen tot een standaardaanpak (zoals haakjes wegwerken), maar toch een ander soort aanpak vergen. Een bekend voorbeeld bij het oplossen van kwadratische vergelijkingen is een opgave als $(x - 2)(x - 5) = 0$. Leerlingen zijn geneigd hier haakjes weg te werken. Door na te gaan waar deze stap in het schema voorkomt en waarom dit nou een 'fopvergelijking' is (vakterm: visueel niet-saillant), leren leerlingen na te denken over een geschikte aanpak. Dit valt onder *symbol sense* ([1], blz. 65) en is een van de vele manieren die helpen voorkomen dat leerlingen in de examenklas willekeurige methoden bij willekeurige opgaven gebruiken of niet meer weten welke methode uit het oerwoud van methoden ze moeten kiezen. Mooi onderzoek voor de bovenbouw: wat kun je ontdekken over de oplossing van $A^n =$ getal als n geen geheel getal is? Of als n een negatief getal is?

Lonneke Boels

[1] Drijvers, P., e.a. (2012). *Handboek wiskundedidactiek*. Epsilon.


vakbladeuclides.nl/901boels

STATISTIEK IN HET NIEUWE PROGRAMMA WISKUNDE A

Lonneke Boels
Anne van Bodegraven
Patrick Hamersma

In het schooljaar 2015-2016 starten de vierde klassen van havo en vwo met het nieuwe examenprogramma wiskunde. De grootste verandering is misschien wel het onderdeel statistiek dat totaal anders wordt opgezet. Het statistisch redeneren met grote datasets staat hierbij voorop. De auteurs van dit artikel vertellen over lesmateriaal dat hiervoor ontwikkeld is.

Wat is er gemaakt?

Tijdens de leergang wiskunde is door een groep docenten in Zwolle lesmateriaal gemaakt voor de havo om met *Excel* grote datasets te analyseren.[1] Op hun advies hebben we in Delft hier een schoolexamen bijgemaakt. Daarnaast hebben we een uitbreiding voor vwo-leerlingen gemaakt.[2]

Het lesmateriaal *Statistiek met grote datasets* (zie [1]) bestaat uit een basiscursus voor het gebruiken van *Excel*. Hierin leren leerlingen om diverse representaties met *Excel* te maken, zoals een lijngrafiek, een stapeldiagram, een cirkeldiagram, een spreidingsplot en een boxplot. Ook leren leerlingen formules in *Excel* te maken en te gebruiken, bijvoorbeeld voor de berekening van het gemiddelde of kwartielen. De basiscursus sluit af met het analyseren van de gevonden gegevens. Het doel van het lesmateriaal is uiteraard niet om met *Excel* te leren werken, maar om (grote) datasets goed te kunnen analyseren. Daarbij komen als vanzelf allerlei vragen naar voren, zoals: wanneer gebruik je een lijngrafiek en wanneer is een boxplot handiger? Welke soort gegevens kun je in een cirkeldiagram zetten en welke niet? Waarom moeten gegevens soms eerst worden bewerkt, bijvoorbeeld het omzetten van tekstvelden in cijfervelden? Wanneer maak je indelingen in klassen en welke klassengrootten kies je dan? Naar aanleiding van de resultaten in Zwolle is in Delft een schoolexamen gemaakt. Bovendien is de basiscursus *Excel* uitgebreid met twee onderwerpen die niet in het examenprogramma van vwo wiskunde A zitten, maar in de praktijk wel veel worden gebruikt: correlatie en regressie. Dit zouden dan keuze-onderwerpen voor wiskunde A kunnen zijn. In het schoolexamen zijn vragen over dit onderwerp duidelijk gescheiden van vragen over het 'verplichte' deel, zodat docenten kunnen kiezen om deze uitbreiding wel of niet te doen. Een mogelijk vervolg op het huidige lesmateriaal is nog het toetsen van hypothesen dat wel onderdeel van het examen is.

Waarom *Excel*?

Het aanleren van de benodigde vaardigheden in *Excel* kost een paar lessen. Als met het programma *VU-stat* zou worden gewerkt, is veel minder tijd nodig, zodat vrijwel direct met het analyseren van resultaten kan worden begonnen en meer tijd kan worden besteed aan het uiteindelijke doel van het lesprogramma: zorgen dat leerlingen begrijpen welke representaties er zijn, wat de voor- en nadelen daarvan zijn en zorgen dat leerlingen een onderbouwde keuze kunnen maken tussen verschillende representaties.

De belangrijkste reden om toch voor *Excel* te kiezen, is dat het op elke school beschikbaar is en voor leerlingen ook toegankelijk en beschikbaar is buiten het vak wiskunde en zelfs buiten de schoolomgeving. Het is bovendien het meest gebruikte programma in het bedrijfsleven. Voor praktische opdrachten van andere vakken en profielwerkstukken gebruiken leerlingen daarom nu al vrijwel altijd *Excel*. Leerlingen die hiermee goed kunnen werken, hebben dus een voordeel bij hun latere (school) loopbaan, ongeacht waar ze gaan werken. De tijd die het nu kost om dit aan te leren, vertaalt zich in tijdswinst voor later en bovendien in een betere kwaliteit van verslagen bij wiskunde en andere vakken.

Hoe kom je aan geschikte datasets?

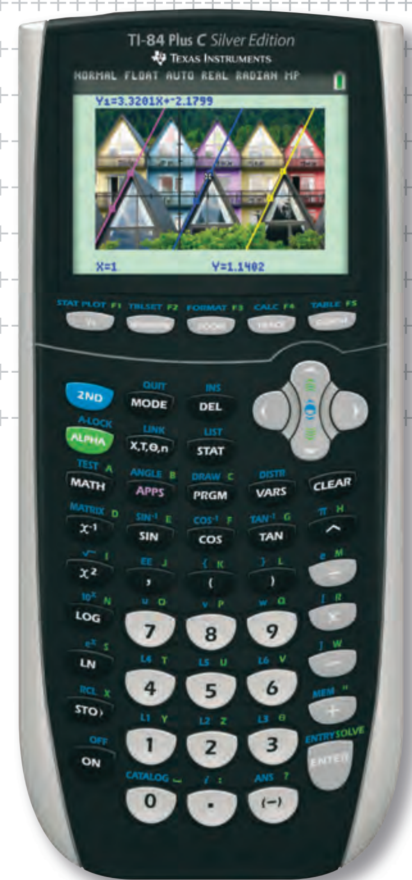
Het blijkt lastig om geschikte datasets te vinden die data bevatten die enerzijds aansluiten bij de belevingswereld van leerlingen en anderzijds goed te analyseren zijn. Schoolgegevens kosten tijd om te verzamelen en zijn privacygevoelig. De groep in Delft heeft daarom een aantal datasets verzameld en geschikt gemaakt (zie [3]). Het geschikt maken bestaat bijvoorbeeld uit het omzetten van punten in komma's of het onder elkaar zetten van gegevens die naast elkaar staan. Hoewel het nuttig kan zijn om leerlingen ook hiermee ervaring op te laten doen, is het verstandig om te beginnen met een 'mooie' dataset.[3]

Wat zijn de ervaringen bij het uitproberen?

Het materiaal dat door de werkgroep in Zwolle was gemaakt voor het havo is uitgetest in 4 vwo. In twee lesuren is de *basiscursus Excel* doorgewerkt inclusief de paragraaf 'gegevensanalyse'. De aanvulling voor het vwo

De nieuwe TI-84 Plus-C *silver edition*

Is nu beschikbaar, bestel 'm!



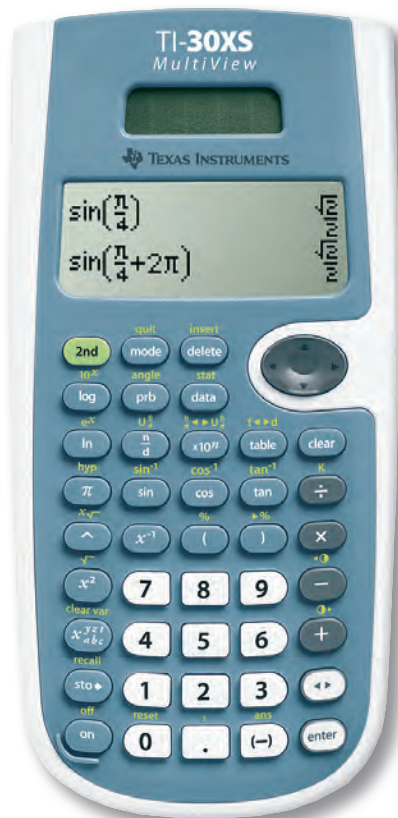
- Met backlight kleurenscherm, oplaadbare batterij en lader
- Met Examenstand/Geheugen-blokkering
- Ook weer met TI-SmartView, maar nu met kleur!
- Gratis upgrade uw huidige zwart-wit SmartView naar kleur

Zeer aantrekkelijke lerarenaanbieding

voor € 69,-. Met gratis TI-SmartView software voor beamer of digibord.

Goedgekeurde grafische rekenmachines voor het Centraal Eindexamen havo/vwo:

- TI-83 Plus en TI-84 Plus
- TI-84 Plus C Silver Edition
- TI-Nspire CX



Nieuw! Nu ook lerarenaanbieding voor de wetenschappelijke rekenmachine TI-30XS MultiView.

Machine + SmartView software voor projectie met beamer of digibord voor slechts € 20,-

> Mail voor aanbiedingsformulieren en/of meer informatie naar ti-cares@ti.com

> Kijk ook op www.edcuation.ti.com/nederland

www.education.ti.com/nederland

Texas Instruments

is ook uitgetest in 4 vwo (al is het materiaal bedoeld voor 5 vwo); hiervoor blijkt een lesuur voldoende. In het laatste lesuur zijn de eerste vijf opgaven van het schoolexamen uitgetest.
Wat blijkt uit deze ervaringen? De leerlingen waren goed in staat om de basiscursus en de aanvulling door te werken. Om daarna zelf grafieken te maken bij grote datasets bleek in 4 vwo echter nog een stap te ver. Er is kennelijk meer tijd nodig om leerlingen echt te laten begrijpen hoe de grafieken tot stand komen en welk type grafiek in welke situatie zinvol is. Een van de groepen leerlingen maakte bijvoorbeeld een cirkeldiagram bij 13915 verschillende meetgegevens – en kreeg zo dus, als de computer niet vastliep, 13915 verschillende cirkelsegmenten. Dat was een mooie aanleiding om te praten over het nut en de noodzaak van het werken met 'klassen'. Daarnaast kan *Excel* alleen overweg met numerieke gegevens. Dit betekent dat een kolom met bijvoorbeeld het geslacht van de deelnemer moet worden omgezet in een cijferkolom 1 = vrouw, 2 = man. Begrippen als nominaal en ordinaal komen zo aan de orde – begrippen die in het nieuwe statistiekprogramma onderdeel van het examenprogramma zijn. Verder maken leerlingen nogal eens fouten met het sorteren en selecteren van gegevens en blijkt *Excel* gevoelig te zijn voor de volgorde van selecteren (wanneer de CTRL-toets te vroeg wordt ingedrukt bij het selecteren van meerdere kolommen ontstaan er totaal andere grafieken). Bovendien is voor een deel van het lesmateriaal een invoegtoepassing van *Excel* vereist – *Toolpak Analysis*. In de handleiding voor leerlingen is opgenomen hoe je deze invoegt. Het is verstandig om vooraf op school uit te testen of deze invoegtoepassing kan worden toegevoegd en dit zo nodig vooraf met systeembeheer te regelen.
Tot slot bleek de methode om boxplots te maken die in Zwolle is gebruikt, niet te werken in de nieuwste versies van *Excel*. In de handleiding voor vwo wiskunde A is een methode opgenomen die in de nieuwste versies van *Excel* wel werkt.

Tips voor docenten

Uit de ervaringen van de werkgroep in Delft is een aantal lessen te trekken:

- laat leerlingen benoemen welke grafieken wel en niet zinvol zijn bij welke soort gegevens en waarom;
- geef leerlingen voorbeelden van grafieken die nietszeggend of 'mislukt' zijn en laat ze discussiëren over de oorzaak van de problemen. Hiervoor kunnen 'mislukte' grafieken van eerdere pogingen van leerlinggroepen prima worden gebruikt. Als dit op een respectvolle manier gebeurt in een veilige sfeer waarin fouten maken mag, is dit zelfs zeer effectief;[4]
- laat vwo-leerlingen ook de opdrachten van het havomateriaal maken over grote datasets;
- laat de leerlingen discussiëren over welke bewerkingen op de dataset nog zinvol zouden kunnen zijn en welke andere grafieken je daarbij dan vervolgens kunt maken. Denk hierbij aan het gemiddelde per … of gegevens opsplitsen naar profielen, geslacht, enzovoort;
- laat leerlingen oefenen met en nadenken over welke verbanden (regressies) in het materiaal zouden kunnen zitten en deze onderzoeken. Besteed hierbij ook aandacht aan het verschil tussen correlatie en causaliteit. In het tv-programma *Eureka!* van Ionica Smeets en Sofie van den Enk wordt dit heel leuk uitgelegd[5] en op de site van Ionica staat een verder toelichting;[6]
- gebruik nog minimaal twee lesuren om de keuzeonderwerpen (regressie en correlatie) van het vwo door te werken;
- probeer aan te sluiten bij een dataset die leerlingen al hebben verzameld voor een ander vak, bijvoorbeeld voor een praktische opdracht of profielwerkstuk;
- zorg dat je als docent vooraf zelf het materiaal hebt doorgewerkt en op school hebt uitgetest.

Noten

[1] Bouman, M., Carmelia, J., Gall, M., Kraai, B., Mostert, J., Vermeulen, E., & Wieren, Y. van (2013). *Statistiek met grote datasets.* Utrecht/Zwolle: Leergang wiskunde. Zie *www.leergangwiskunde.nl.*

[2] Bodegraven, A. van, Boels, L., & Hamersma, P. (2014). *Statistiek met Excel vwo 5 wiskunde A - schoolexamen en uitbreiding op havomateriaal.docx.* Utrecht/Delft: Leergang wiskunde. Zie *www.leergang-wiskunde.nl.*

[3] Leergang wiskunde (2014). *Leergang wiskunde.* Opgeroepen op 25 juni, 2014, van *www.leergangwiskunde.nl.*

[4] Hattie, J. (2013, 08). Leren zichtbaar maken. *Basisschool management*, 3-7.

[5] *Eureka - hoe word ik honderd?* (2013). [Film]. Opgeroepen op 25 juni, 2014, van *www.uitzendinggemist.nl/afleveringen/1374561.* Het voorbeeld van causaliteit gaat over ijsjes en start op 13:48 (min:sec).

[6] Smeets, I. (2013). *Honderd worden.* Opgeroepen op 25 juni, 2014, van *www.ionica.nl/honderd-worden/.*

Over de auteurs

Lonneke Boels is docent wiskunde aan Christelijk Lyceum Delft, Anne van Bodegraven is docent wiskunde aan het Minkema College Woerden en Patrick Hamersma is docent wiskunde aan het Wolfert Lyceum Bergschenhoek.
E-mailadressen: *L.Boels@chrlyceumdelft.nl, a.vanbodegraven@minkema.nl, phm@wolfert.nl*

HET FIZIER GERICHT OP...

Dédé de Haan

LEERGANG VERNIEUWING WISKUNDEONDERWIJS

In FIzier belichten medewerkers van het Freudenthal Instituut een thema uit hun werk en slaan hiermee een brug naar de dagelijkse onderwijspraktijk. In deze aflevering kijkt Dédé de Haan terug op de Leergang Vernieuwing Wiskundeonderwijs.



In het schooljaar 2013/14 is de Leergang Vernieuwing Wiskundeonderwijs[1] verzorgd. De vier cursusdagen hadden steeds dezelfde opzet: in de ochtend twee presentaties en in de middag het ontwerpen van lesmateriaal door docentgroepjes op een zelfgekozen onderwerp. Bij elke bijeenkomst stond één aspect van de nieuwe examenprogramma's centraal: Wiskundige denkactiviteiten (WDA), Statistiek op grote bestanden,[2] Analytische meetkunde en Authentieke toepassingen.

De presentaties in de ochtend (vanuit het bedrijfsleven en vanuit het (vervolg-)onderwijs) hadden een hoog 'NWD-gehalte': inspirerend en enthousiasmerend. We lichten twee presentaties eruit.

John Poppelaars opende de Leergang met een aansprekend verhaal over het werk van ORTEC: wereldwijd bedrijven helpen om op een wiskundig verantwoorde manier de bedrijfsvoering te optimaliseren. Een heel mooi voorbeeld, waarmee ORTEC zelfs een prijs gewonnen heeft, is het adviseren van TNT Express bij het optimaliseren van hun bezorging, ter voorkoming van een faillissement. De vliegtuigen werden te duur, maar waar zet je welk transportmiddel in? Wat typisch is bij dit soort problemen, is dat veel beslissingen op basis van ervaring en onderbuikgevoel genomen worden, maar dat deze beslissingen niet ondersteund worden door wiskundige optimalisatie. Om de CEO's van TNT Express te laten zien wat de meerwaarde is van het gebruik van wiskunde bij dit soort problemen, heeft ORTEC een online spel ontwikkeld, waarmee de CEO's binnen een simulatie van het distributiesysteem hun kosten konden reduceren.
Dit spel heeft overigens ook de basis gevormd van de finale-opgave van de Wiskunde A-lympiade van dit jaar.
De boodschap van John Poppelaars was duidelijk: als je leert denken tijdens je schooltijd en je studie, dan heb je een enorme voorsprong op mensen die vertrouwen op hun onderbuikgevoel.

Rebecca Hamer sprak op de laatste cursusdag, over Authentieke toepassingen. Zij heeft cursussen verzorgd in en onderzoek gedaan naar de toepassingen van de wiskunde in het bedrijfsleven en ook naar het koppelen van docenten met mensen uit het bedrijfsleven. Ze vertelde daar zeer smakelijk over. Eén van haar tips was: maak een lijstje met wiskundeonderwerpen die in het VO aan bod komen (bijvoorbeeld de stelling van Pythagoras, lineaire verbanden, ...) en zoek een (bèta-) bedrijf in je regio. Bel onder werktijd(!) en vraag naar iemand die over zijn of haar werk wil vertellen op school. Als voorbereiding kun je het lijstje voorleggen en laten aanvinken welke wiskunde de werknemer daadwerkelijk nog gebruikt. Bereid het organisatorisch goed voor, zorg voor een cadeautje voor de spreker en stuur een verslagje en foto's – zodat het op de interne website van het bedrijf geplaatst kan worden. Houd contact! Zeer inspirerend voor leerlingen én docenten!

Tijdens de middag waren de groepjes docenten druk met het ontwikkelen van eigen lesmateriaal, passend bij het vernieuwde examenprogramma. Voor alle thema's is zeer bruikbaar materiaal gemaakt. Bij Wiskundige denkactiviteiten is onder andere een volledige lessenserie (veertien lessen) met docentenhandleiding gemaakt voor het domein Tellen. Zie het kader voor een voorbeeld hieruit.

Al het gemaakte materiaal is uitgeprobeerd door de deelnemers en op grond van deze ervaringen waar nodig aangepast. Ook u kunt ermee aan de slag! U vindt alles op de website *www.leergangwiskunde.nl*.
Daar vindt u ook alles wat samenhangt met de nieuwe examens: het rapport van cTWO, de syllabi, het pilotmateriaal van cTWO – maar ook korte filmpjes waarin u over het nieuwe examenprogramma geïnformeerd wordt; daarnaast vele bronnen voor onderwijs in de nieuwe examenprogramma's en natuurlijk alle lezingen van de sprekers. Kortom: ga naar *www.leergangwiskunde.nl* en raak geïnspireerd!

Noten

[1] De projectleiding van de Leergang was in handen van het Platform Bèta Techniek (PBT); projectpartners waren de SLO (aansturen van de implementatie van de cTWO-programma's), het Platform Wiskunde Nederland (PWN, aansturing disseminatie van de opbrengsten van de Leergang) en het Freudenthal Instituut (FIsme, aansturing op de inhoud van de Leergang). Het project werd gefinancierd door Google.

[2] Zie ook het artikel van Lonneke Boels e.a. op pagina 31

Over de auteur

Dédé de Haan is werkzaam bij het Freudenthal Instituut en was samen met Henk van der Kooij verantwoordelijk voor het middaggedeelte van de Leergang Vernieuwing Wiskundeonderwijs, waarin docenten lesmateriaal produceerden, passend bij het nieuwe examenprogramma voor wiskunde. Daarnaast werkt zij als lerarenopleider wiskunde aan de NHL Hogeschool te Leeuwarden.
E-mailadres: *d.dehaan@uu.nl*

Les 6: Wiskunde-estafette

Doel: op tempo telproblemen oplossen

Leerlingen gaan in viertallen met voorkennis 'puzzelen' aan verschillende telopgaven. Leerlingen kunnen kiezen uit een makkelijke opgave (deze levert vier punten op) of een moeilijke opgave (deze levert tien punten op). Als leerlingen niet uit een opgave komen, kunnen ze een 'Tip' kopen. De vraag levert dan nog maar de helft van de punten op. Leerlingen krijgen pas een nieuwe vraag als de vorige met de juiste oplossing is ingeleverd. Bij drie keer een fout antwoord voor dezelfde vraag volgen er drie strafpunten en dan kiest het groepje een nieuwe vraag. Na 30 minuten is het spel over. De leerlingen met de meeste punten hebben gewonnen.

- Elk groepje kiest een vraag door 'makkelijk' of 'moeilijk' te zeggen gevolgd door een cijfer van 1 tot en met 8. Met deze vraag gaan de leerlingen aan de slag.
- Print de opgaven zo vaak uit als er groepjes zijn.
- Houd per groep een scoreformulier bij.
- Voor de tips zijn knipbladen gemaakt: horizontaal snijden en in het midden vouwen.
- Er zijn twee mogelijkheden:
  - de tips kunnen alleen bij de tafel van de wedstrijdleider gelezen worden; in dit geval is één set tips voldoende;
  - de leerlingen kunnen de tips mee naar hun groepje nemen, in dit geval moet er per groepje een set tips gemaakt worden.

(uit materiaal van Lidy Wesker e.a.)



MEDEDELING



FINALE NWO

Op vrijdag 12 september vindt op de Technische Universiteit Eindhoven de finale van de Nederlandse Wiskunde Olympiade plaats. Hiervoor zijn 161 leerlingen uitgenodigd uit de categorieën zesde klas, vijfde klas en vierde klas of lager. Zij krijgen in drie uur tijd vijf pittige opgaven voor hun kiezen.

Zelf ook proberen?

Vanaf maandag 15 september vindt u de opgaven (en uitwerkingen) op *www.wiskundeolympiade.nl*. De vijftien prijswinnaars (vijf uit elk van de drie categorieën) worden 7 november bekendgemaakt tijdens de prijsuitreiking.

VANUIT DE OUDE DOOS

Ton Lecluse

In deze rubriek bespreekt Ton Lecluse opgaven die de vorige eeuw tot in de Tweede Wereldoorlog in toelatingsexamens voor universiteiten zijn gebruikt. Hij beperkt zich tot opgaven die, naar zijn mening, ook door de huidige leerlingen wiskunde op het vwo gemaakt moeten kunnen worden. Eventueel met enige hulp of als kleine praktische opdracht. Of wellicht geeft de opgave u een handvat om eens een opgave in zo'n vorm te ontwerpen!



A° $19\frac{29}{35}$

De eerste opgave beschrijft een situatie die in elk meetkundeboek voor 4/5/6 vwo wiskunde B voorkomt, en komt uit een examen trigonometrie en analytische meetkunde. De tweede opgave komt uit een algebra-examen en kan prima in deze vorm in de bovenbouw van havo of vwo aangeboden worden. Er hoeft geen factor-stelling te worden bijgehaald; met enige sturing kan elke leerling deze maken. Wellicht vindt u het leuk om de opgaven eerst zelf te proberen. Verderop treft u mijn uitwerkingen aan.

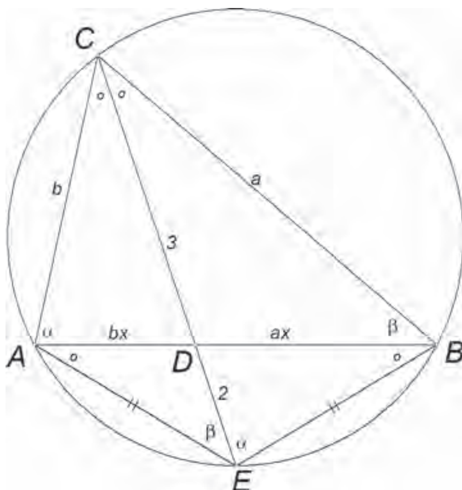
Opgave 1 – In driehoek ABC snijdt de bissectrice van $\angle C$ de zijde AB in D, de omgeschreven cirkel in E. Bereken de hoeken A en B, als gegeven is: $\angle C = 60°$ en $CD : DE = 3 : 2$. Tussen welke grenzen kan men de verhouding $CD : DE$ kiezen, als de voorwaarde $\angle C = 60°$ gehandhaafd wordt?

Opgave 2 – Bepaal a, b, c zodanig dat $ax^2 + bxy + cy^2 - 5x + 11y - 3$ deelbaar is door $x + 2y - 3$.

Uitwerking opgave 1

Een werkschets

Wilt u het zelf eerst eens verder proberen?



Een eerste inventarisatie

- de hoeken met een rondje zijn allemaal 30°;
- de bissectricestelling zegt dat $AC : BC = AD : BD$, dus is er een positief getal x zo dat $AD = ax$ en $BD = bx$;
- er zijn gelijkvormige driehoeken aanwezig.

Omdat we hoekgroottes moeten uitrekenen, geen lengtes, kunnen we zonder meer stellen dat $CD = 3$ en $DE = 2$. Welke conclusies kunnen hieruit getrokken worden?

In meer detail

Driehoek ADE gelijkvormig met driehoek CDB

$AD = bx$	$DE = 2$	EA
$CD = 3$	$DB = ax$	$BC = a$

(1)... hieruit volgt: $x^2 = \dfrac{6}{ab}$

(2)... en $AE = \dfrac{2}{x}$ (= BE)

(3)... en $AD = \sqrt{\dfrac{6b}{a}}$

De cosinusregel geeft in driehoek ACD, met gebruikmaking van (3):

$$AD^2 = AC^2 + DC^2 - 2 \cdot AC \cdot DC \cdot \cos 30°$$

dus $\dfrac{6b}{a} = b^2 + 9 - 2 \cdot 3 \cdot b \cdot \cos 30°$ waaruit a kan worden vrijgemaakt:

(4)... $a = \dfrac{6b}{b^2 - 3\sqrt{3}b + 9}$

De cosinusregel geeft in driehoek ABE, met gebruikmaking van (2):

$$AB^2 = AE^2 + BE^2 - 2 \cdot AE \cdot BE \cdot \cos 120°$$

Dus $\left((a+b)x\right)^2 = \left(\dfrac{2}{x}\right)^2 + \left(\dfrac{2}{x}\right)^2 - 2 \cdot \dfrac{2}{x} \cdot \dfrac{2}{x} \cdot \cos 120°$

waaruit x^2 kan worden vrijgemaakt: $x^2 = \dfrac{2\sqrt{3}}{a+b}$

Combineren van deze uitdrukking met (1) levert op:

(5)... $x^2 = \frac{6}{ab} = \frac{2\sqrt{3}}{a+b} \Rightarrow a = \frac{b\sqrt{3}}{b-\sqrt{3}}$

Uit (4) en (5) kunnen *a* en *b* worden uitgerekend met als tussenresultaat $b^2 - 5\sqrt{3}b + 15 = 0$ (deze vergelijking geldt ook voor *a*)

(6)... en uiteindelijk

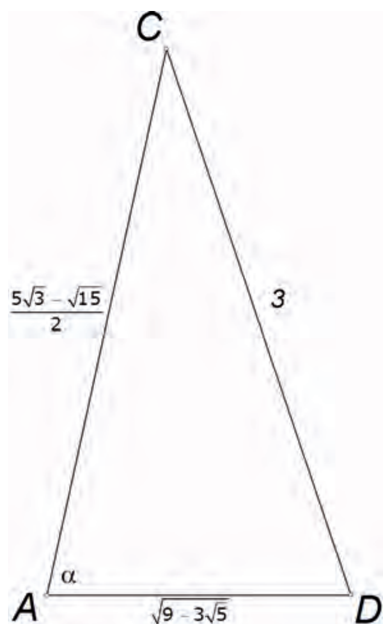
$a = \frac{5\sqrt{3}+\sqrt{15}}{2} \wedge b = \frac{5\sqrt{3}-\sqrt{15}}{2}$ (of omgekeerd)

(7)... via (3) volgt nu $AD = \sqrt{\frac{6b}{a}} = \sqrt{9-3\sqrt{5}}$

Hoe nu verder?

Afronding

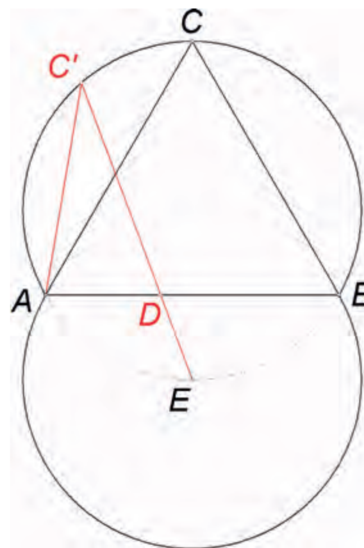
We plaatsen de resultaten (6) en (7) in driehoek *ADC*, waarvan we nu de lengtes van alle zijden kennen. Met de cosinusregel volgt nu: $\alpha \approx 97{,}76124391 \approx$ 97°54'40''.



Slotvraagje

De tweede vraag van deze opgave is relatief eenvoudig. We bestuderen de meetkundige plaats van *C* met $\angle C = 60°$ en *AB* vast. Deze bestaat uit twee cirkelbogen, waarvan de bovenste deel uitmaakt van de gelijkzijdige driehoek *ABC* (en is *E* het middelpunt van de onderste cirkelboog).

Punt *C'* doorloopt deze achtvorm, waarbij we ons kunnen beperken tot het deel boven *AB*.
Wanneer *C'* van *C* naar *A* of *B* loopt, blijft *E* op zijn plaats, wordt *CD* korter en *DE* langer, en uiteindelijk



nadert $\frac{CD}{DE}$ naar 0; de grootste waarde heeft $\frac{CD}{DE}$ wanneer *C'* met *C* samenvalt. Wanneer de gelijkzijdige driehoek zijden *p* heeft, is $CD = \frac{1}{2}p\sqrt{3}$ en $DE = \frac{1}{6}p\sqrt{3}$ (verifieert u dit even?), en is dus $\frac{CD}{DE} = 3$.

Dus geldt: $0 < \frac{CD}{DE} \leq 3$

Uitwerking opgave 2

Voor een wiskunde B-leerling in de bovenbouw mag deze opgave geen probleem zijn. Uit de coëfficiënten van x^2, y^2 en de –3 achteraan kunnen we de structuur van de tweede factor herkennen, dus kunnen we opschrijven:
$ax^2 + bxy + cy^2 - 5x + 11y - 3 = (x + 2y - 3)(ax + \tfrac{1}{2}cy + 1)$.

Bij het uitwerken van de haakjes hoeven we nog slechts te letten op de termen met *x, y* en *xy*: $(1 - 3a)x$; $(2 - 1\tfrac{1}{2}c)y$ en $(\tfrac{1}{2}c + 2a)xy$. Vergelijken met de overeenkomstige termen van de gegeven zesterm geeft dan $a = 2$, $c = -6$ en $b = 1$.

Bron

Stoelinga, Dr. Th. G.G., & van Tol, Dr. M.G. (Red.) (1958). *Wiskunde-Opgaven (van de toelating tot de Universiteiten van 1925 tot 1958).* Uitg. Tjeenk Willink, achtste druk.

Over de auteur

Ton Lecluse is docent wiskunde aan 't Hooghe Landt te Amersfoort. E-mailadres: *alecluse@casema.nl*



MEDEDELING

VERDIEPINGSCURSUS

Aan de hand van een casus laten we in deze verdiepingscursus zien hoe je in de Life Sciences strategische beslissingen kunt nemen op grond van mathematische modellen. Als centraal voorbeeld gebruiken we het modelleren van het beheer van kudden in een savannegebied en gaan na hoe woestijnvorming kan worden voorkomen.
De casus die we behandelen lijkt specifiek voor Afrika, maar het model en de wiskundige technieken die we gebruiken zijn heel generiek en sluiten aan bij de lesstof in Wiskunde B en D: het oplossen van differentiaalvergelijkingen, het maximum bepalen van functies en continue dynamische systemen.

Organisatie: Bètasteunpunt Wageningen
Docenten: Prof. dr. J. Molenaar en dr. ir. H. Stigter
Datum: donderdag 30 oktober 2014
Tijd: 15.00 tot 20.00 uur
Kosten: € 110,– inclusief avondmaaltijd en cursusmateriaal
Meer informatie: *www.wageningenur.nl/docenten*



APS-Exact

Ook in het schooljaar 2014-2015 organiseert APS-Exact diverse cursussen en studiedagen, o.a.:

5 november	Start cursus Een goede voorbereiding op de nieuwe wiskundeprogramma's
12 november	Start cursus Leidinggeven aan de wiskundesectie
2 december	Start cursus Van onbevoegd naar bekwaam
10 december	Studiemiddag Didactiek en ICT in de rekenles
10 december	Studiemiddag Toetsen en leerlingvolgsysteem rekenen-wiskunde
15 december	Start Opleiding rekencoördinator

U kunt zich aanmelden via onze site **www.aps.nl/agenda**

Informatie
APS-Acadamie
030 28 56 722
academie@aps.nl
www.aps.nl



RECENSIE

REKEN MAAR NERGENS OP

Sietske Tacoma

Bent u benieuwd hoe de stelling van Pythagoras uw seksleven kan redden? Of, iets onschuldiger wellicht, welke maatschappelijke problemen de uitvinding van het wiel teweeg heeft gebracht? Jan Beuving en Daan van Eijk hebben daar wel een paar theorieën over. Die delen ze graag met hun publiek in hun show *Reken maar nergens op*, komend jaar in twintig theaters in heel het land. Hun cabaret over wetenschap is een prachtig college van twee keer drie kwartier, met een kwartier pauze, maar zonder academisch kwartiertje. De show bestaat uit liedjes en verhalen over allerlei belangrijke en minder belangrijke wetenschappelijke ontdekkingen en ontwikkelingen, waarbij niet alleen de wetenschap zelf, maar ook de mensen achter de wetenschap in het spotlicht staan. Op 24 juni was de eerste try-out van dit theaterprogramma. En die smaakte naar meer.

Jan en Daan hebben beiden in Utrecht gestudeerd, Jan wiskunde en wetenschapsgeschiedenis en Daan natuurkunde. Daan is daarna gepromoveerd bij het CERN in Genève, dus met de wetenschappelijke achtergrond van de heren zit het wel goed. Jan is na zijn studie wiskunde ook afgestudeerd als liedtekstschrijver aan de Koningstheateracademie in Den Bosch, en is sindsdien zelfstandig liedtekstschrijver. De teksten in de show zitten knap in elkaar en bevatten veel humor. Het grootste deel van die tekst neemt Jan in de show zelf voor zijn rekening, maar als de wetenschap Jan even te ingewikkeld wordt, laat hij rustig Daan alles uitleggen, zodat zowel Jan als het publiek het weer begrijpen.

In de show belichten de heren wetenschappelijke theorieën uit verschillende disciplines. Veel van de liedjes en teksten gaan over wiskunde en natuurkunde, wat te verwachten is gezien de achtergrond van de heren. Maar ook biologie, scheikunde en informatica komen aan bod. De moeilijkheidsgraad varieert: van de stelling van Pythagoras tot de snaartheorie, van een eenvoudige rekenles tot de chemie in een atoombom. De heren verwachten dat het publiek een idee heeft bij termen als ‘evolutie’ en ‘zwaartekracht’, maar gaan bijna nergens zo diep op wetenschap in dat het alleen voor afgestudeerde wetenschappers te begrijpen is. En waar dat wel nodig is, zit zoals gezegd Daan klaar om alles rustig en zeer begrijpelijk uit te leggen. Mijn inschatting is dat deze show voor iedere wiskundedocent leuk en interessant is, maar ook voor veel leerlingen, zeker in de bovenbouw. Misschien een idee voor een klassenuitje?

Het publiek mag tijdens de show ook zelf aan de slag, in bovengenoemde rekenles bijvoorbeeld. Bij de try-out deed het publiek hier enthousiast aan mee. Ook zong men mee bij de liedjes waarbij dat mogelijk was. Andere liedjes zaten zo ingenieus in elkaar dat het al bewonderenswaardig was dat Jan en Daan ze zelf konden zingen.

Al met al was het een zeer interessante, leerzame en vooral heel vermakelijke show. ‘Reken maar nergens op’, zeggen de heren zelf, maar ik denk dat u op een heerlijke avond uit kunt rekenen.

Over de recensent

Sietske Tacoma werkt bij het Freudenthal Instituut aan de ontwikkeling van de Digitale Wiskunde Omgeving. Ook is ze mede-organisator van de Nationale Wiskunde Dagen en zit ze in de redactie van *Euclides*.
E-mailadres: *S.G.Tacoma@uu.nl*

Speellijst

2014

14/9	Den Bosch	Verkadefabriek (matinee)
1/10	Naaldwijk	Westlandtheater de Naald (uitverkocht)
18/10	Apeldoorn	Schouwburg Orpheus
21/10	Amstelveen	VU Griffioen (première)
6/11	Meppel	Ogterop (uitverkocht)
13/11	Hoofddorp	Het Oude Raadhuis
24/11	Enschede	Vrijhof Cultuurcentrum
10/12	Leiden	Scheltema
13/12	Tilburg	Schouwburg Tilburg
19/12	Utrecht	Werftheater
20/12	Utrecht	Werftheater

2015

2/1	Amsterdam	Bellevue
3/1	Amsterdam	Bellevue
24/1	Meppel	Ogterop (uitverkocht)
31/1	Drachten	Lawei (uitverkocht)
13/3	Hengelo	Bibliotheek

JAARVERGADERING/ STUDIEDAG 2014

TWEEDE UITNODIGING

Marianne Lambriex

Dit is de tweede uitnodiging voor de jaarvergadering/studiedag 2014 van de *Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren* op **zaterdag 8 november 2014**.
Aanvang – 10:00 uur
Sluiting – 16:00 uur
Plaats – **Ichthus College, Vondellaan 4, 3906 EA Veenendaal**

Agenda
10:00 - 10:50 uur – **Huishoudelijk gedeelte**

1. Opening door de voorzitter, mevr. M. Kollenveld
2. Jaarrede door de voorzitter
3. Notulen van de jaarvergadering 2013 (zie het volgende nummer van *Euclides*)
4. Jaarverslagen 2013/2014 NVvW en *Euclides* (zie het volgende nummer van *Euclides*)
5. Jaarrekening en balans 2013/2014, verslag kascommissie, decharge van de penningmeester, begroting 2015/2016, vaststelling contributie en benoeming nieuwe kascommissie
6. Bestuursverkiezing. De voorzitter mevr. M. Kollenveld en de secretaris C. Lagerwaard treden af en stellen zich niet herkiesbaar. De heer D. van der Kooi is aftredend en stelt zich herkiesbaar In een Nieuwsbrief aan alle leden die in september verschijnt, zal het bestuur nieuwe bestuurskandidaten voorstellen. Tot 28 dagen na het verschijnen van deze Nieuwsbrief kunnen tegenkandidaten schriftelijk worden voorgedragen bij het bestuur door ten minste vijf leden
7. Rondvraag. Leden die een vraag in de rondvraag willen stellen, wordt verzocht deze vraag vóór aanvang van de vergadering in te dienen bij de secretaris (*secretaris@nvvw.nl*)
8. Sluiting van het huishoudelijk gedeelte

Programma Studiedag

10:50 – 11:10	Afscheid van voorzitter M. Kollenveld
11:10 – 11:50	Plenaire lezing, aansluitend bij het thema: wiskunde in beweging
11:50 – 12:00	Koffie
12:00 – 13:00	Workshopronde 1
13:00 – 14:00	Lunchpauze, marktbezoek, kennismaken nieuwe leden met bestuur
14:00 – 15:00	Workshopronde 2
15:00 – 15:20	Koffie
15:20 – 16:00	Plenaire voordracht
16:00 – 17:00	Afsluiting gevolgd door een receptie

Dit programma is onder voorbehoud omdat enkele onderdelen nu (juli 2014) nog volop in ontwikkeling zijn. In de Nieuwsbrief houden we u hiervan op de hoogte.

Themagedeelte - Wiskunde in beweging

Dat wiskunde(onderwijs) in beweging is, ervaren we al jaren. De tijd dat je met je lesvoorbereiding rustig tien jaar kon teren op de ervaringen van vorige jaren ligt al ver achter ons. Nieuwe examenprogramma's, tussendoelen, rekentoetsen en een breed scala aan nieuwe (didactische) hulpmiddelen zorgen ervoor dat we voortdurend op zoek zijn naar verantwoorde manieren om onze leerlingen te helpen bij het leren van ons geliefde vak. Maar met 'Wiskunde in beweging' willen we tijdens de studiedag ook andere aspecten van wiskundeonderwijs over het voetlicht krijgen. Uiteraard zijn daar



de moderne hulpmiddelen van de ICT die het leren van wiskunde op een dynamische manier didactisch verantwoord kunnen ondersteunen. Maar heeft u wel eens nagedacht over het gebruik van film(pje)s in de les om leerlingen te motiveren een wiskundig onderwerp serieus te nemen? Hebt u wel eens iemand uit het bedrijfsleven in de klas uitgenodigd om enthousiast te vertellen waarom wiskunde zo belangrijk is in zijn/haar beroepspraktijk? Heeft u wel eens, samen met collega's op school of in de regio, lesmaterialen ontwikkeld die het gewone lesgebeuren van 'werken uit het wiskundeleerboek' kunnen doorbreken? Wiskunde in beweging heeft naar onze mening twee kanten:

- de door de overheid opgelegde eisen, zoals nieuwe examenprogramma's, verplichte rekentoetsen en het voldoen aan tussendoelen. Als docent moet je daar binnen de school aan voldoen;
- uw persoonlijke invulling van het dagelijks lesgebeuren zoals u dat voor ogen staat, wellicht mede gestimuleerd door samenwerking met collega's bij het maken van zinvolle lesactiviteiten (bijvoorbeeld via de Vaksteunpunten wiskunde bij u in de buurt), het inzetten van nieuwe hulpmiddelen bij het leren van wiskunde. Wist u dat veel collega's het heel fijn vinden om te horen en te ervaren hoe u met uw leerlingen lessen interessant maakt?

We bieden u bijdragen aan over:

- leservaringen bij onderwerpen van de nieuwe examenprogramma's havo/vwo;
- het aanhaken bij andere vakken dan wiskunde in vmbo/havo/vwo;
- wiskundeprofessionals in de klas;
- op bezoek bij het bedrijfsleven met de klas;
- het gebruik van nieuwe ict-middelen in het onderwijs;
- samen onderwijs maken in de regio.

Zoals gebruikelijk houden we de afsluitende plenaire presentatie nog even geheim.

Zoals u ziet, bieden we een vol en gevarieerd programma, en belooft het weer een interessante dag te worden. De omschrijvingen van de workshops worden, net als vorig jaar, vanaf nu op de site van de NVvW gepresenteerd, tegelijkertijd met het uitkomen van dit nummer van *Euclides*. De eindverantwoordelijken voor het themagedeelte zijn Henk van der Kooij en Lidy Wesker-Elzinga (e-mailadressen: *h.vanderkooij@uu.nl*; *L.J.B.Elzinga@uva.nl*).

De LIO-dag

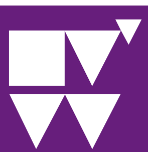
Intussen is de LIO-dag een succesvolle traditie geworden: een speciaal programma voor de studenten van de lerarenopleidingen, met name de lio'ers. Het ochtendgedeelte gaat over hun afstudeerscriptie, met pas afgestudeerden als sprekers, en in de middag nemen ze deel aan het themagedeelte.

Nieuwe leden

De studiedag is een uitstekende gelegenheid voor het bestuur om persoonlijk kennis te maken met de nieuwe leden. Dat vindt plaats met een hapje en een drankje en een praatje tijdens de lunchpauze. Daarvoor nodigen we de nieuwe leden van harte uit. In de loop van oktober ontvangen zij hiervoor een persoonlijke uitnodiging via de mail.

Kosten

De studiedag is gratis voor leden.
Leden: maak (nog) eens reclame voor de vereniging en breng een collega-niet-lid mee! Niet-leden zijn welkom tegen betaling van een bijdrage in de kosten van € 80,00; (deze kosten kan de school betalen uit de nascholingsgelden en zijn als vakbondscontributie op te voeren!). Hiermee zijn zij, als ze daarvoor belangstelling hebben, tevens gratis lid van de vereniging tot 1 september 2015, inclusief alle faciliteiten, waaronder de zeven nummers van de lopende jaargang van *Euclides*, gratis toegang tot examenbesprekingen in het voorjaar en mogelijkheid tot deelname aan de verenigingswerkgroepen. Ook studenten zijn welkom, zij betalen € 40,00. Wie een lunch bestelt, betaalt daarvoor € 10,00.



Aanmelding

Aanmelding dient tijdig te geschieden **vóór 20 oktober 2014**. Ook vorig jaar melden zich nog 96 enthousiaste deelnemers na de sluiting van aanmelding. Dat leverde voor de organisatie wederom veel problemen op. Bij onvoldoende deelnemers bij de voorinschrijving van een werkgroep zal deze niet doorgaan. De werkgroepleiders stellen hun tijd en inzet gratis ter beschikking en het is dan teleurstellend om voor twee personen een lange trip te moeten maken. Voor de organisatie (ook vrijwilligers) is het van belang dat u zich op tijd aanmeldt. Dit jaar gaat de aanmelding weer geheel digitaal via de nieuwe site van de vereniging. Daarop staat het volledige programma, inclusief de workshops waar u een keuze uit kunt maken. Het voor u geldende bedrag kunt u aflezen uit de volgende tabel. Het aanmeldingsformulier leidt u door de vragen en geeft ook aan hoe u kunt betalen.

	Zonder lunch	**Met lunch**
Lid	gratis	€ 10,00
Niet-lid	€ 80,00	€ 90,00
Student (niet-lid)	€ 40,00	€ 50,00

De plaatsing in werkgroepen geschiedt in de twee laatste weken in volgorde van binnenkomst van aanmelding. Zoals vorig jaar wordt de indeling een paar dagen voor de studiedag op de site gepubliceerd; aan het begin van de studiedag ontvangt u een badge met uw plaatsingsgegevens. Ter plaatse aanmelden is mogelijk, echter niet wenselijk omdat het kunnen bijwonen van een werkgroep afhankelijk is van de beschikbare ruimte.
De eindverantwoordelijken voor de indeling in de workshops zijn Henk en Arja Bijleveld (e-mailadres: *henk.bijleveld@gmail.com*).

Markt

Naast alle workshops is er ook een uitgebreide markt waar u uw hart kunt ophalen aan boeken, rekenmachines, spellen, wiskunst en alle wiskundemethodes. Er is zowel een commercieel als een niet-commercieel deel. Verantwoordelijk voor deze markt is Ruud Jongeling (e-mailadres: *rj.jongeling@kpnmail.nl*).

Certificaat

De NVvW heeft de mogelijkheid om nascholingscertificaten uit te reiken, die u kunt gebruiken voor *www.registerleraar.nl*. Wilt u een certificaat ontvangen, vermeld dan bij uw aanmelding ook uw voorletters en uw geboortedatum. U kunt uw certificaat na afloop van de studiedag (vanaf 15:45 uur) in ontvangst nemen, op vertoon van een geldig identiteitsbewijs. U hebt alleen recht op een certificaat als u de gehele studiedag heeft meegemaakt. Certificaten worden niet nagestuurd.

Informatie

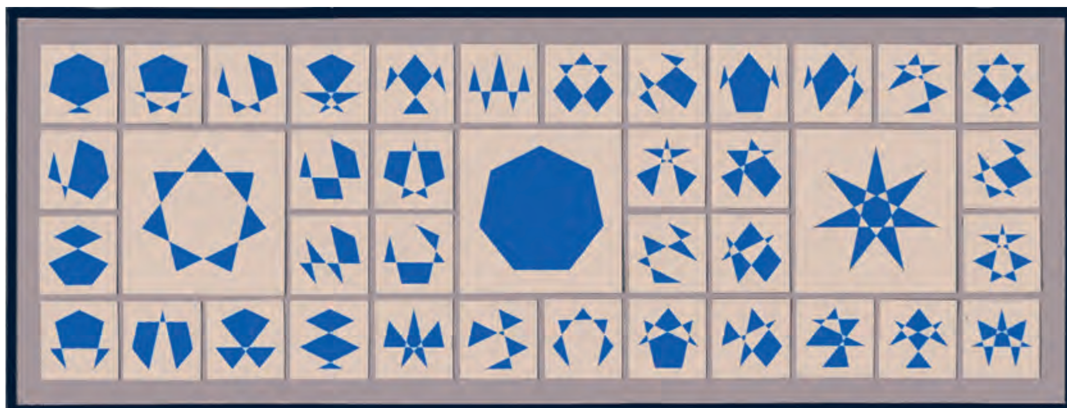
Verantwoordelijk voor de organisatie en contactpersoon van deze dag is Marianne Lambriex (e-mailadres: *m.lambriex@nvvw.nl*) en zij wordt bijgestaan door Marjan Botke. Met vragen kunt u altijd terecht bij de ledenadministratie: Heleen van der Ree (tel.: 0180 32 10 97, e-mailadres: *ledenadministratie@nvvw.nl*).

PUZZEL 90-1

HET *SCHILDE* RIJTJE VAN FRITS GÖBEL

Lieke de Rooij
Wobien Doyer

Deze puzzel is een variatie op een idee van Frits Göbel. Het gaat over veelhoeken waarvan de hoekpunten samenvallen met die van een regelmatige *n*-hoek, dus op gelijke afstanden gelegen op een cirkel. De zijden van zo'n veelhoek hoeven echter niet altijd twee naast elkaar gelegen punten te verbinden. Frits tekende zo alle zevenhoeken. Met een mooi kleurtje is dat een decoratief schilderijtje geworden, zie figuur 1. Vragen die opkomen, gaan dan over het aantal mogelijkheden en de bijbehorende symmetrie van zulke veelhoeken. We zijn natuurlijk niet beperkt tot $n = 7$.



figuur 1

We beschouwen congruente *n*-hoeken als gelijk. Dus twee figuren die door rotatie en/of spiegeling in elkaar overgaan zijn gelijk. Het moge duidelijk zijn dat voor $n = 3$ er slechts een zo'n *n*-hoek bestaat. Voor $n = 4$ zijn het er twee. De symmetrie van de figuurtjes kunnen we vergelijken met de letters T, H, S of O. T heeft precies één spiegelas, H heeft er precies twee loodrecht op elkaar. S heeft een rotatie van 180°, zonder spiegelas. Bij O_k is de kleinste rotatie over 360°/*k*. Maximale symmetrie van een *n*-hoek krijgen we met O_n, dus ook *n* spiegelassen. Als we de *n* hoekpunten, gelegen op een cirkel, in die volgorde nummeren, is elke figuur te beschrijven als een permutatie van die *n* nummers.

Opgave 1 – Bepaal zoveel mogelijk niet congruente zeshoeken.

Opgave 2 – Bepaal het aantal verschillende T-symmetrische veelhoeken, dus niet H- of O-symmetrisch, voor $n = 7$, $n = 11$ en algemeen voor n = priem.

Opgave 3 – Bepaal voor $n = 8$ alle S-symmetrische figuren, dus zonder spiegelas.
Hoewel er voor de *n* nummers *n*! permutaties zijn, zijn er natuurlijk een stuk minder niet-congruente figuren mogelijk. Rekening houdend met de verschillende soorten symmetrie, kunnen we zo berekenen of alle mogelijkheden in figuur 1 zijn gerealiseerd.

Opgave 4 – Onderzoek of dat het geval is en geef uw berekening.
Tip: U kan zo natuurlijk ook uw antwoord op vraag 1 controleren. Volgens de literatuur zijn er 202 verschillende achthoeken. Ook dat is te controleren. Een hele klus voor eventuele doorbijters. Misschien iets voor de programmeurs onder u?
Mooie tekeningen zijn natuurlijk welkom, maar u mag uw oplossingen ook beschrijven met permutaties, dus rijtjes of schilderijtjes.

Inzenden oplossingen
Gehele of gedeeltelijke oplossingen kunt u weer mailen naar *liekewobien@hotmail.nl* of sturen naar Lieke de Rooij, Oudeweg 27, 2811 NN Reeuwijk. Er zijn weer 20 punten te verdienen voor de ladderwedstrijd en extra punten als wij uw idee voor een nieuwe puzzel gebruiken. De aanvoerder van de ladder ontvangt een boekenbon ter waarde van 20 euro. De deadline is 16 oktober a.s. Wij wensen u veel plezier.

UITWERKING PUZZEL 89-6

WEB-DRIEHOEKEN

Wobien Doyer
Lieke de Rooij

In de inleiding van deze puzzel begonnen we met een periodieke baan met periode 3 in een webgrafiek, horende bij een recursievergelijking van de vorm $un + 1 = F(un)$. De bijbehorende periodieke rij getallen a, b, c, a, b, c, ... gaven we aan met (a,b,c). We bekeken dan de punten met coördinaten $A(a,b)$, $B(b,c)$ en $C(c,a)$. De driehoek ABC hebben we gedefinieerd als web-driehoek en de vragen gingen over de eigenschappen van zo'n driehoek.
Enkele inzenders merkten terecht op dat volgens deze definitie strikt genomen a, b en c alle drie verschillend moeten zijn. Als bijvoorbeeld zou gelden $a = b$, dan volgt uit de recursie automatisch dat ook $b = c$ en dan is er geen sprake van een driehoek. Maar we zijn natuurlijk vrij om de eigenschappen van alle driehoeken met hoekpunten $A(a,b)$, $B(b,c)$ en $C(c,a)$ te bestuderen. Er waren dertien inzenders en de meesten vonden het deze keer niet erg moeilijk, wel leuk.

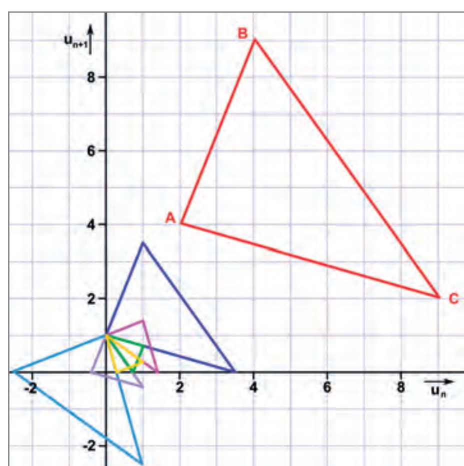
Bij **opgave 1** werd gevraagd naar de meetkundige plaats van de zwaartepunten van zulke web-driehoeken. Omdat de coördinaten van het zwaartepunt van een driehoek gelijk zijn aan de gemiddelden van die van de hoekpunten geldt: $x = (a + b + c)/3$ en $y = (b + c + a)/3$, dus de meetkundige plaats is de lijn $y = x$.

Bij **opgave 2** moest bij een gegeven voorbeeld met $(a,b,c) = (2,4,9)$ een triplet $(0,1,d)$ worden bepaald, zodat die een gelijkvormige driehoek oplevert met die van het triplet (2,4,9). Door verschuiving en vermenigvuldiging krijgen we: $(2,4,9) \rightarrow (0,2,7) \rightarrow (0,1,3½)$. Dus $d = 3½$. Een aantal inzenders drukte dit uit met de formule $d = (c - a)/(b - a)$.
Bij bovenstaande transformaties wordt het punt $A(2,4)$ afgebeeld op (0,1), B op de lijn $x = 1$ en C op de x-as. Maar andere volgorden zijn ook mogelijk door het rijtje (a,b,c) cyclisch te verwisselen en/of te spiegelen. Dat geeft 3 x 2 = 6 verschillende oplossingen. G. Bouwhuis liet zien dat als je d vervangt door $1/d$ of $1 - d$ er aan elkaar gelijkvormige driehoeken ontstaan. Aangevuld met combinaties daarvan dus ook $(d - 1)/d$, $d/(d - 1)$ of $1/(1 - d)$.
Daarmee is snel in te zien dat behalve $d = 7/2$ ook $d = 2/7$, $d = -5/2$, $d = 5/7$, $d = 7/5$ en $d = -2/5$ oplossingen zijn van opgave 2 in symmetrische paren. Zie figuur 1.

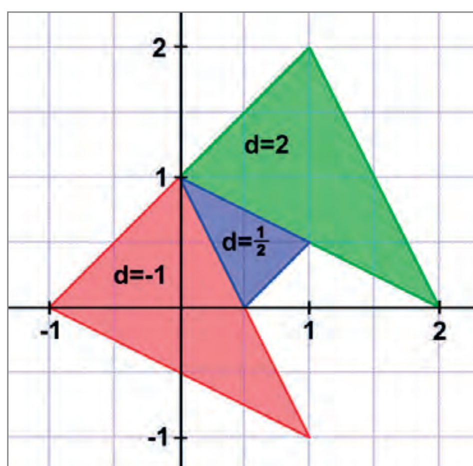
Als we bedenken dat van een gegeven web-driehoek elk hoekpunt naar keuze kan worden afgebeeld op (0,1) om een gelijkvormige $(0,1,d)$-driehoek te krijgen, zal duidelijk zijn dat we bij de opgaven 3, 4 en 5 slechts één oriëntatie van de driehoek hoeven te onderzoeken. Voor die opgaven was het handig om de lengtes van de zijden uit te drukken in d:
$AB^2 = (d - 1)^2 + 1$; $BC^2 = d^2 + (d - 1)^2$ en $AC^2 = d^2 + 1$.

Bij **opgave 3** moesten rechthoekige web-driehoeken worden bepaald. Dat werd aangepakt met de stelling van Pythagoras, inproducten of het product van de richtingscoëfficiënten is –1. Eén keuze, bijvoorbeeld hoek $B = 90^o$, is dus voldoende en geeft $d = 1$. Dus ook $d = 1 - 1 = 0$. Zo krijgen we driehoeken met hoekpuntcoördinaten (0,1), (1,1), (1,0) en (0,1), (1,0), (0,0). Beide bepalen driehoeken met hoeken van 90°, 45°, 45°. Hier hebben we wel te maken met tripletten waarvan twee getallen gelijk zijn.

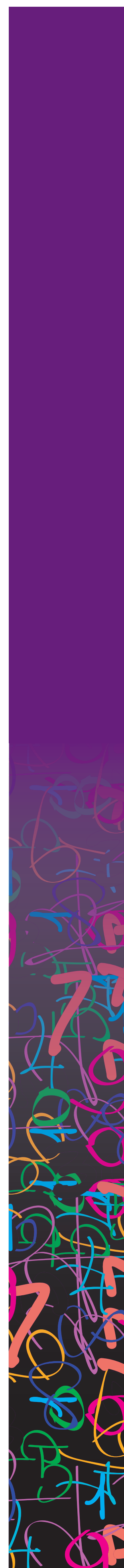
Voor **opgave 4a** moesten de mogelijke d-waarden van gelijkbenige, niet rechthoekige web-driehoeken worden bepaald. Daartoe werden de lengtes van twee zijden, uitgedrukt in d, aan elkaar gelijk gesteld. Ook hier onderzocht iedereen daarvoor drie paren zijden, terwijl één paar voldoende was. De makkelijkste is $(d - 1)^2 + 1 = d^2 + 1$ geeft $d = 0{,}5$. Dus ook $d = 2$ en $d = -1$, alle drie gelijkvormig. Zie figuur 2. In feite zijn er ook oplossingen voor d nadert tot $\pm\infty$ en dus ook d nadert tot 0 of 1, maar die kwamen we al tegen bij opgave 3 met rechte hoeken. Bij **opgave 4b** moest de tophoek worden berekend.



figuur 1



figuur 2



Met bijvoorbeeld $d = 0{,}5$ en de cosinusregel volgt zo dat $\cos(A) = \dfrac{1}{\sqrt{((d-1)^2+1)(d^2+1)}} = 0{,}8$.

En dat is een hoek gelijk aan de kleinste hoek in de bekende 3–4–5 Pythagorasdriehoek, ongeveer 37°.

Bij **opgave 5** werd gevraagd om de grenzen van de mogelijke grootte van de hoeken van web-driehoeken te bepalen. Hiervoor hoeven we weer alleen de formule voor cos(A) te gebruiken, waaruit blijkt dat die voor alle waarden van d bestaat en positief is. Dus de hoeken worden nooit groter dan 90°. J. Meerhof merkte op dat zelfs differentiëren niet nodig was, want als we de grafiek van $f = 1/\cos^2(A) = ((d-1)^2+1)(d^2+1)$ over een afstand 0,5 naar links schuiven krijgen we $g = (d^2+0{,}75)^2+1$, met een minimum bij $d = 0$. Dus f heeft een minimum bij $d = 0{,}5$. We zien dan dat de kleinste hoek X van web-driehoeken de hoek is die reeds was bepaald in opgave 4b. Gevolg: $\arccos(0{,}8) \leq X \leq 90°$. Of $\arccos(0{,}8) \leq X < 90°$ afhankelijk van uw opvatting over de hoeken van 90° in dit verband.

LADDERSTAND

Top-10 van de ladderstand na 89-6 is:

G. Bouwhuis	176
J. Meerhof	164
H. Bakker	152
R. Stolwijk	143
L. Pos	124
G. Riphagen	122
J. Verbakel	110
J. Remijn	110
H. Linders	89
J. Guichelaar	72

De ladderprijs is gewonnen door Gerard Bouwhuis. Hartelijk gefeliciteerd daarmee!

COLOFON

Euclides is het orgaan van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren.
Het blad verschijnt 7 maal per verenigingsjaar.
ISSN 0165-0394

Redactie
Marjanne de Nijs, hoofd- en eindredacteur
Birgit van Dalen, adjunct-hoofdredacteur
Nathalie Kuijpers, adjunct-eindredacteur
Thomas van Berkel
Rob Bosch
Annelien Jonkman
Ernst Lambeck
Sietske Tacoma
Joke Verbeek, secretaris
Heiner Wind, voorzitter

Inzenden bijdragen
Marjanne de Nijs, Opaal 4, 2719 SR Zoetermeer
E-mail: vakbladeuclides@nvvw.nl

Richtlijnen voor artikelen
Tekst digitaal in Word aanleveren, maximaal 1500 woorden. Illustraties en foto's apart digitaal aanleveren in hoge resolutie. Zie voor nadere aanwijzingen: vakbladeuclides.nl/richtlijnen

Realisatie
Ontwerp en vormgeving, fotografie, drukwerk en mailingservices.
De Kleuver bedrijfscommunicatie b.v. Veenendaal, www.dekleuver.nl

Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren
Website: www.nvvw.nl

Voorzitter
Marian Kollenveld, Leeuwendaallaan 43, 2281 GK Rijswijk
Tel. (070) 390 70 04 E-mail: voorzitter@nvvw.nl

Secretaris
Kees Lagerwaard, Eindhovensingel 15, 6844 CA Arnhem
Tel. (026) 381 36 46 E-mail: secretaris@nvvw.nl

Ledenadministratie
Heleen van der Ree, Bladmos 23, 2914 AA Nieuwerkerk a/d IJssel
Tel. (0180) 32 10 97 E-mail: ledenadministratie@nvvw.nl

Helpdesk rechtspositie
NVvW - Rechtspositie-Adviesbureau,
Pijlkruid 7, 4102 KE Culemborg Tel. (0345) 531 324

Lidmaatschap
Het lidmaatschap van de NVvW is inclusief *Euclides*.
De contributie per verenigingsjaar bedraagt voor
- leden: € 80,00
- leden, maar dan zonder *Euclides*: € 50,00
- studentleden (tot 27 jaar) en gepensioneerden: € 40,00
- leden van de VVWL of het KWG: € 50,00

Bijdrage WwF (jaarlijks): € 2,50
Nieuwe leden dienen zich op te geven bij de ledenadministratie.
Opzeggingen moeten plaatsvinden vóór 1 juli.
Betaling binnen 30 dagen na factuurdatum.

Abonnementen *Euclides* niet-leden
Abonnementen gelden steeds vanaf nr 1 van de lopende jaargang
Personen (niet-leden van de NVvW): € 70,00
Instituten en scholen: € 150,00
Losse nummers zijn op aanvraag leverbaar: € 20,00
Betaling binnen 30 dagen na factuurdatum.

Advertenties en bijsluiters
De Kleuver bedrijfscommunicatie b.v. t.a.v. F. van Dop
Kerkewijk 63, 3901 EC Veenendaal, Tel. (0318) 555 075
E-mail: secretariaat@dekleuver.nl

KALENDER

In de kalender kunnen alle voor wiskunde-leraren toegankelijke en interessante bijeenkomsten worden opgenomen.
Relevante data graag zo spoedig mogelijk doorgeven aan de eindredacteur
E-mail: vakbladeuclides@nvvw.nl

2014

vr 7/9
EINDHOVEN
Finale Nederlandse Wiskunde Olympiade
Organisatie NWO

do 18/9
Jaarvergadering en studiemiddag
Organisatie NVORWO

vr 7/11
EINDHOVEN
Prijsuitreiking Nederlandse Wiskunde Olympiade
Organisatie NWO

za 8/11
VEENENDAAL
Jaarvergadering/Studiedag, zie ook pagina 40
Organisatie NVvW

vr 21/11
ZWOLLE
Bartjens Rekendictee
Organisatie NWO

2015

za 10/1
UTRECHT
Wintersymposium KWG: Dataverwerking en statistiek
Organisatie KWG

19/1 t/m 29/1
19 JANUARI TOT 29 JANUARI, LANDELIJK
Eerste ronde Nederlandse Wiskunde Olympiade
Organisatie NWO

vr/za 30/1 31/1
VRIJDAG 30 JANUARI, ZATERDAG 31 JANUARI
Nationale Wiskundedagen
Organisatie Freudenthal Instituut

do 19/3
DONDERDAG 19 MAART, OP DE SCHOLEN
W4 Kangoeroewedstrijd
Organisatie Stichting Wiskunde Kangoeroe

Hieronder staan de verwachte verschijningsdata en de bijbehorende deadline vermeld voor het inzenden van mededelingen en van de eindversies van geaccepteerde bijdragen; zie daarvoor echter ook www.nvvw.nl/euclricht.html

JAARGANG 90

nr.	verwachte verschijningsdatum	deadline
2	4 november 2014	8 september 2014
3	16 december 2014	27 oktober 2014
4	5 februari 2015	4 december 2014
5	24 maart 2015	19 januari 2015
6	13 mei 2015	16 maart 2015
7	30 juni 2015	18 mei 2015



3 jaar garantie

Uitdaging:

Kiest u voor de workshop of ontdekt u de *fx*-CG20 zelf?

Ontdek de eenvoud van de *fx*-CG20 in een professionele Casio Workshop, die op afspraak én bij u op locatie kosteloos zal worden gegeven. Casio Educatief Consulent David Kropveld zorgt er voor dat u zich de werking van de *fx*-CG20 in korte tijd eigen maakt. Vele collega's gingen u voor.

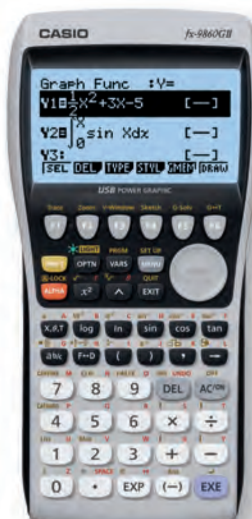
- Supersnel resultaat in berekening én weergave.
- Menustructuur op basis van iconen navigatie.
- Hogeresolutie LCD-kleurenscherm 65.000 kleuren.
- Haarscherpe grafieken: weergave als in een studieboek.
- Software voor projectie en presentatie in de klas.

Test u de *fx*-CG20 of een andere Casio rekenmachine liever zélf? Maak dan gebruik van een speciaal geprijsd docentenexemplaar.

Kijk op:
www.casio-educatie.nl



Informeer naar de Casio *fx*-CG20 Workshop of bestel uw exemplaar voor € 39,50 via e-mail: educatie@casio.nl



CASIO
fx-9860GII

Rekengemak: de grafische rekenmachine *fx*-9860GII met groot contrastrijk display met natuurlijke invoer en uitvoer, achtergrondverlichting en 1,5 MB groot Flash-ROM-geheugen.



CASIO
fx-82ES PLUS

Geniale oplossing: de technisch-wetenschappelijke zakrekenmachine *fx*-82ES Plus, met natuurlijke invoer- en uitvoerfunctie. Het puntmatrixscherm zorgt voor meer begrip tijdens het onderwijs.

CASIO. dé nummer 1 in rekenmachines voor het onderwijs.

Casio Benelux B.V. - Tel: 020 545 10 70 - educatie@casio.nl - www.casio-educatie.nl

MODERNE WISKUNDE

Met Moderne Wiskunde klaar voor het nieuwe examenprogramma!



Noordhoff Uitgevers

Vraag nu een beoordelings-exemplaar aan!

Nieuw!

Moderne Wiskunde 11e editie Tweede Fase:

- een optimale mix van boek en ict;
- een nieuw type opdrachten in de methode, zoals:
  - extra opdrachten om nieuwe theorie in te oefenen;
  - wiskundige denk activiteiten.
- Vernieuwde ict:
  - digitale voorkennis;
  - digitale paragraaf;
  - digitale oefentoets.

Meer weten?

Ga naar www.modernewiskunde.noordhoff.nl.

Noordhoff Uitgevers werkt voor de docent